Analitička geometrija u prostoru

Prava

Ako prava p *prolazi tačkom* $M_1(x_1,y_1,z_1)$ *i ako je paralelna vektoru* $\vec{p}=(l,m,n)$, *onda su njene jednačine:*

Vektorska vednačina: $(\vec{r}-\vec{r}_1)\times\vec{p}=\vec{0}$;

Kanonska jednačina: $\dfrac{x-x_1}{l}=\dfrac{y-y_1}{m}=\dfrac{z-z_1}{n}$;

Parametarske jednačine: $x=x_1+lt,\quad y=y_1+mt,\quad z=z_1+nt$.

Prava je jednoznačno određena i ako je data kao presjek dvije ravni:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}.$$

Ako je prava p *u prostoru određena dvjema tačkama* $M_1(x_1,y_1,z_1)$ *i* $M_2(x_2,y_2,z_2)$ *kroz koje prolazi, njena kanonska i parametarske jednačine imaju oblik:*

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1},\qquad \begin{aligned} x&=x_1+t(x_2-x_1)\\ y&=y_1+t(y_2-y_1)\\ z&=z_1+t(z_2-z_1)\end{aligned}.$$

Vektorska jednačina prave koja prolazi tačkama $M_1(x_1,y_1,z_1)$ *i* $M_2(x_2,y_2,z_2)$ *glasi:*

$\vec{r}=\vec{r}_1+t(\vec{r}_2-\vec{r}_1)$.

Ako su prave p_1 *i* p_2 *date jednačinama:*

$\dfrac{x-x_1}{l_1}=\dfrac{y-y_1}{m_1}=\dfrac{z-z_1}{n_1}$ *i* $\dfrac{x-x_2}{l_2}=\dfrac{y-y_2}{m_2}=\dfrac{z-z_2}{n_2}$, *onda je ugao* φ *između tih pravih , jednak uglu između vektora* $\vec{p}_1=(l_1,m_1,n_1)$ *i* $\vec{p}_2=(l_2,m_2,n_2)$, *tj. vrijedi:* $\cos\varphi=\dfrac{\vec{p}_1\cdot\vec{p}_2}{|\vec{p}_1||\vec{p}_2|}$.

Prave p_1 *i* p_2 *su paralelne, ako i samo ako je* $\dfrac{l_1}{l_2}=\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}$, *a okomite ako i samo ako je* $l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0$.

Ako je prava p *data vektorskom jednačinom* $\vec{p}\times(\vec{r}-\vec{r}_1)=0$, *onda se udaljenost tačke* $M_2(x_2,y_2,z_2)$ *od prave* p *računa prema formuli:* $d=\dfrac{|(\vec{r}_1-\vec{r}_2)\times\vec{p}|}{|\vec{p}|}$, *gdje je* $\vec{r}_2$ *radijus vektor tačke* M_2.

1. Ako je prava p data kao presjek dvije ravni $\begin{cases} x-2y+3z-4=0 \\ 3x+2y-5z-4=0 \end{cases}$, napisati njenu vektorsku, kanonsku i parametarske jednačine.

2. Napisati jednačine ivica tetraedra čija su tjemena: $A(0,0,2)$, $B(4,0,5)$, $C(5,3,0)$ i $D(-1,4,2)$.

3. Naći kosinuse uglova koje prava $\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{2}$ gradi sa koordinatnim osama.

4. Napisati jednačine pravih u kanonskom obliku i naći ugao između njih:
$\begin{cases} 2x-y-7=0 \\ 2x-z+5=0 \end{cases}$ i $\begin{cases} 3x-2y+8=0 \\ z=3x \end{cases}$.

5. Napisati jednačinu normale na $z-$osu koja prolazi tačkom $M_1(-2,-1,2)$.

6. Kroz tačku $M_1(1,-2,1)$ povući pravu:
   a) paralelnu $x-$osi;
   b) paralelnu pravoj $x=2$, $y=3$.

7. Izvesti potreban uslov da se prave $\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$ i $\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$ sijeku.

8. Odrediti n u jednačini prave $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-1}{n}$, da bi se sjekla sa pravom $\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-4}{3}$ i u tom slučaju naći koordinate presječne tačke.

9. Odrediti parametre α i β tako da prava $\begin{cases} x-y+z+1=0 \\ 2x+\alpha y+z+\beta=0 \end{cases}$ leži u ravni $x0y$.

10. Odrediti prodor prave $\frac{x-4}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-1}{-2}$ kroz koordinatne ravni.

11. Napisati kanonsku i parametarske jednačine prave čija vektorska jednačina glasi:
$\vec{r}\times\left(2\vec{i}+\vec{j}-3\vec{k}\right)=5\vec{i}+2\vec{j}+4\vec{k}$.

12. Naći rastojanje između dvije paralelne prave: $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{2}$ i $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{2}$.

13. Naći najkraće rastojanje između pravih: $\frac{x+1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{2}$ i $\frac{x}{1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{4}$.

14. Na pravoj $\frac{x-8}{8}=\frac{y-2}{-6}=\frac{z}{0}$ naći tačku čije rastojanje od tačke $(8,2,0)$ iznosi 10.