CIJELI ELEMENT. CIJELA ZAVISNOST. VALUACIJE

1. Neka je prsten B cio nad prstenom A, Ω algebarski zatvoreno polje, a $f: A \to \Omega$ homomorfizam prstena. Dokazati da se f može produžiti do homomorfizma $g: B \to \Omega$.

Rješenje:
Neka je $f: A \to \Omega$ homomorfizam prstena A u polje Ω. Označimo sa α jezgro tog homomorfizma i pokažimo da je α prost ideal prstena A. Neka je $ab \in \alpha$ i $a \notin \alpha$. To znači da je $f(ab) = f(a) f(b) = 0$ i $f(a) \neq 0$. Kako polje Ω nema netrivijalnih djelitelja nule mora biti $f(b) = 0$, tj. $b \in \alpha$. Dakle, α je prost ideal prstena A, a B je cio nad A pa postoji pros ideal β prstena B za koji je $\alpha = \beta \cap A$. Ovo znači da se prsten A/α može posmatrati kao potprsten prstena B/β, a prsten B/β je cio nad prstenom A/α. Neka je k' polje razlomaka prstena B/β. Prema posljedici 5.22. prsten B/β je sadržan u svakom valuacionom prstenu C polja k' koji sadrži prsten A/α. Prema propoziciji 5. 23. homomorfizam $f': A/\alpha \to \Omega$ induciran homomorfizmom f može se produžiti do homomorfizma $h: C \to \Omega$, gdje je C valuacioni prsten polja k' koji sadrži prsten A/α. Neka je $l = h|_{B/\beta}$, a $g = l \circ n$, gdje je $n: B \to B/\beta$ prirodni epimorfizam. Jasno je da $g: B \to \Omega$, i da je g homomorfizam. Znači, g je traženo produženje homomorfizma $f: A \to \Omega$.

2. Neka je A potprsten prstena B. Ako je skup $B \setminus A$ zatvoren u odnosu na množenje, dokazati da je prsten A cijelo zatvoren u B.

Rješenje:
Prsten A je cijelo zatvoren u B ako je $A = C$, gdje je C skup svih elemenata iz B cijelih nad A. Neka je $b \in B$ cio element nad prstenom A. Neka je $f(x) = x^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_{n-i} x^i$ polinom najnižeg stepena za koji je $f(b) = 0$. Ovo znači da je $b^n + a_1 b^{n-1} + \ldots + a_n = 0$, a odavde vidimo da $b^n + a_1 b^{n-1} + \ldots + a_{n-1} b \in A$. Ako stavimo da je $b^{n-1} + a_1 b^{n-2} + \ldots + a_{n-1} = c$ onda imamo da $bc \in A$. Ako bi $c \in A$ to bi bilo u kontradikciji sa izborom polinoma $f(x)$, pa prema tome $c \in B \setminus A$. Ako bi $b \in B \setminus A$, onda bi s obzirom na pretpostavku imali da $bc \in B \setminus A$, što je nemoguće. Dakle, $b \in A$, a kako je b bio proizvoljan element iz B cio nad A, zaključujemo da je prsten A cijelo zatvoren u B.

3. Neka je A potprsten oblasti B, a C cijelo zatvorenje prstena A u B. Ako su $f, g \in B[x]$ polinomi sa najstarijim koeficijentom 1 dokazati da: $fg \in C[x] \Rightarrow f, g \in C[x]$.

Rješenje:
Neka je k polje razlomaka oblasti B, a L polje razlaganja polinoma fg nad k. U polju L je $f(x) = \prod_i (x - \alpha_i)$ i $g(x) = \prod_i (x - \beta_i)$. Ako polinom $fg \in C[x]$, onda su α_i i β_i cijeli nad C, pa su i koeficijenti polinoma f i g cijeli nad C, a kako je C cijelo zatvorenje prstena A u B, to oni pripadaju C. Dakle, $f, g \in C[x]$.

4. Neka je prsten B cio nad prstenom A. Dokazati:
 a) Ako je $x \in A$ jedinica prstena B, tada je x jedinica i prstena A;
 b) Jacobsonov radikal prstena A je kontrakcija Jacobsonovog radikala prstena B.

Rješenje:
a) Neka je $b \in A$ jedinica prstena B i neka je $f(x) = x^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_{n-i} x^i$ polinom najnižeg stepena za koji je $f(b^{-1}) = 0$. To znači da je $(b^{-1})^n + a_1 (b^{-1})^{n-1} + \ldots + a_n = 0$, pa je $b^{-1} = -a_n b^{n-1} - a_{n-1} b^{n-2} - \ldots - a_1 \in A$. Dakle, b je jedinica prstena A.
b) Za svaki maksimalan ideal m prstena A postoji maksimalan ideal n prstena B za koji je $m = A \cap n$, a za svaki maksimalan ideal n prstena B, ideal $m = A \cap n$ je maksimalan u A. Kako je Jacobsonov radikal jednak presjeku maksimalnih ideala prstena, tvrdnja je jasna.

5. Neka je G konačna grupa automorfizama nekog prstena A, a A^G potprsten G-invarijanti, tj. $A^G = \{x \in A : \sigma(x) = x, \forall \sigma \in G\}$.
 a) Dokazati da je prsten A cio nad prstenom A^G;
 b) Neka za multiplikativan sistem S prstena A vrijedi $\sigma(S) \subseteq S$ $(\forall \sigma \in G)$ i neka je $S^G = A^G \cap S$. Tada se svako $\sigma \in G$ može produžiti do automorfizma $\bar{\sigma}$ prstena $S^{-1}A$ tako da se G može shvatiti i kao grupa automorfizama prstena $S^{-1}A$. Dokazati da je tada $(S^G)^{-1} A^G \cong (S^{-1}A)^G$.

Rješenje:
b) Neka je $a \in A$ proizvoljno. Pokažimo da postoji polinom $f(x)$ sa koeficijentima iz A^G takav da je $f(a) = 0$. Posmatrajmo polinom $f(x) = \prod_{\sigma \in G} (x - \sigma(a))$. Kako je $\sigma(f(x)) = f(x)$ $(\forall \sigma \in G)$ to je $f(x) \in A^G[x]$. Osim toga, jasno je da je najstariji koeficijent ovog polinoma jednak 1 i da je $f(a) = 0$. Prema tome, a je cio element nad prstenom A^G, a kako je $a \in A$ proizvoljan element, zaključujemo da je prsten A cio nad A^G.

c) Automorfizam $\bar{\sigma}$ je definisan sa $\bar{\sigma}\left(\frac{x}{s}\right)=\frac{\sigma(x)}{\sigma(s)}$ $\left(\forall \frac{x}{s}\in S^{-1}A\right)$. Neka je $f:\left(S^G\right)^{-1}A^G\to S^{-1}A$ ulaganje. f je dobro definisano i homomorfizam je. Odredimo čemu je jednako $\operatorname{Im}(f)$ i $Ker(f)$. Neka je $\frac{x}{s}\in\operatorname{Im}(f)$. To znači da $\frac{x}{s}\in\left(S^G\right)^{-1}A^G$ pa je $x\in A^G$ i $s\in S^G$. Dakle, za svako $\bar{\sigma}\in G$ je $\bar{\sigma}\left(\frac{x}{s}\right)=\frac{\sigma(x)}{\sigma(s)}=\frac{x}{s}$, pa $\frac{x}{s}\in\left(S^{-1}A\right)^G$.

Obratno, neka je $\frac{x}{s}\in\left(S^{-1}A\right)^G$, tj. neka je $\bar{\sigma}\left(\frac{x}{s}\right)=\frac{\sigma(x)}{\sigma(s)}=\frac{x}{s}$ za svako $\bar{\sigma}\in G$. Ovo znači da za svako $\sigma\in G$ postoji $u_\sigma\in S$ takvo da je $\left(\sigma(x)s-\sigma(s)x\right)u_\sigma=0$, pa je i $\left(\left(\sum_{\sigma\in G}\sigma(x)\right)s-x\left(\sum_{\sigma\in G}\sigma(s)\right)\right)\prod_{\sigma\in G}u_\sigma=0$. Ako stavimo da je $x'=\sum_{\sigma\in G}\sigma(x)$, $s'=\sum_{\sigma\in G}\left(\sigma(s)\right)$ i $u=\prod_{\sigma\in G}u_\sigma$, tada $x'\in A^G$, $s',u\in S^G$, pa je $\frac{x}{s}=\frac{x'}{s'}\in\left(S^G\right)^{-1}A^G$, tj. $\frac{x}{s}\in\operatorname{Im}(f)$.

Neka je sada $\frac{x}{s}\in Ker(f)$. $f\left(\frac{x}{s}\right)=0$ što znači da postoji $u\in S$ takvo da je $xu=0$. Sada je i $x\sigma(u)=\sigma(ux)=\sigma(0)=0$ $(\forall\sigma\in G)$, pa je i $x\sum_{\sigma\in G}\sigma(u)=0$. Znači $\frac{x}{u}=0$ (u $\left(S^G\right)^{-1}A^G$) jer je $\sum_{\sigma\in G}\sigma(u)\in S^G$.

Iz svega rečenog zaključujemo da je $Ker(f)=0$ i $\operatorname{Im}(f)=\left(S^{-1}A\right)^G$, što znači da je $\left(S^G\right)^{-1}A^G\cong\left(S^{-1}A\right)^G$.

6. Uz oznake prethodnog zadatka dokazati : Ako je γ prost ideal prstena A^G, a P skup prostih ideala prstena A čija je kontrakcija γ, tada G tranzitivno djeluje na P, tj. $(\forall\gamma_1,\gamma_2\in P)(\exists\sigma\in G)$ takvo da je $\sigma(\gamma_1)=\gamma_2$. Specijalno je skup P konačan.

Rješenje:

Neka su $\gamma_1,\gamma_2\in P$ i neka je $x\in\gamma_1$ proizvoljno. γ_1 je kontrakcija ideala γ pa je $\gamma=\gamma_1\cap A^G$. $\prod_{\sigma\in G}\sigma(x)\in\gamma_1$ i $\prod_{\sigma\in G}\sigma(x)\in A^G$, što znači da je $\prod_{\sigma\in G}\sigma(x)\in A^G\cap\gamma_1=\gamma\subseteq\gamma_2$. γ_2 je prost ideal pa postoji $\sigma\in G$ za koje je $\sigma(x)\in\gamma_2$, tj. $x\in\sigma^2(\gamma_2)$. Znači, $\gamma_1\subseteq\bigcup_{\sigma\in G}\sigma^{-1}(\gamma_2)$. $\sigma^{-1}(\gamma_2)$ su prosti ideali prstena A, pa odavde slijedi da postoji $\sigma\in G$ takvo da je $\gamma_1\subseteq\sigma^{-1}(\gamma_2)$, tj, $\sigma(\gamma_1)\subseteq\gamma_2$. Kako je γ kontrakcija ideala γ_2 i $\sigma(\gamma_1)$, na osnovu posljedice 5.9. imamo da vrijedi $\sigma(\gamma_1)=\gamma_2$.

7. Neka je A cijelo zatvorena oblast, k polje razlomaka oblasti A, L konačno, normalno, separabilno proširenje polja k, a B cijelo zatvorenje prstena A u L. Tada je Galoaova grupa G polja L u odnosu na k konačna. Dokazati da je $\sigma(B) = B$ $(\forall \sigma \in G)$ i da je $B^G = A$.

Rješenje:
Neka je A cijelo zatvorena oblast, k polje razlomaka oblasti A. L je konačno, normalno i separabilno proširenje polja k, što znači da za svako $l \in L$ postoji polinom $f(x) \in k[x]$ za koji je $f(l) = 0$. Ako je $f(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i x^{n-i}$, $c_i = \dfrac{a_i'}{a_i''}$, $a_i', a_i'' \in A$, onda za polinom $\bar{f}(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, gdje smo stavili da je $a_i = a_i' \prod_{i=0}^{n} a_i''$ vrijedi $\bar{f}(l) = 0$. Ako sada posmatramo polinom $g(x) = x^n + \sum_{i=1}^{n} b_i x^{n-i}$, gdje je $b_i = a_i a_0^{\,n-1}$, zaključujemo da je $g(x) \in A[x]$ i $g(a_0 l) = 0$. Odavde vidimo da element $a_0 l \in B$, jer je B cijelo zatvorenje prstena A u L.
Pošto je minimalni polinom elementa $b \in B$ oblika $g(x) = x^n + \sum_{i=1}^{n} b_i x^{n-i}$, gdje $b_i \in B$, za svako $\sigma \in G$, minimalni polinom elementa $\sigma(b)$ se podudara sa polinomom $g(x)$, što znači da je $\sigma(b) \in B$. Dakle, $\sigma(B) \subseteq B$ $(\forall \sigma \in G)$. Specijalno, ovo vrijedi i za σ^{-1}, pa je $\sigma^{-1}(B) \subseteq B$, tj. $B \subseteq \sigma(B)$. Iz rečenog zaključujemo da je $B = \sigma(B)$ $(\forall \sigma \in G)$.
Ako je $\sigma(b) = b$ $(\forall \sigma \in G)$, onda je minimalni polinom elementa b stepena 1, pa je $b = a_1 \in A$, što znači da je $B^G = A$.

8. Neka su A i B lokalni prsteni sa maksimalnim idealima α i β. Kaže se da B dominira nad A ako je A podprsten prstena B, a $\alpha = A \cap \beta$. Dokazati da skup Σ svih lokalnih prstena koji su podprsteni polja k ima maksimalni element u odnosu na relaciju "dominira nad" i da je A maksimalni element u Σ ako i samo ako je A valuacioni prsten polja k.

Rješenje:
Pokažimo da je Σ induktivno uređen skup. Neka je $D_1, D_2, \ldots$ lanac u Σ. Stavimo da je $D = \cup D_i$. Kako je $D_1 \subseteq D_2 \subseteq \ldots$ to je D prsten, i to lokalni. Neka je δ maksimalni ideal prstena D. Za svaki prsten D_i vrijedi $\delta \cap D_i = \delta_i$, gdje je δ_i maksimalan ideal prstena D_i, pa D dominira nad D_i. Po Zornovoj lemi sada zaključujemo da skup Σ ima maksimalni element. Označimo ga sa M, a sa m označimo maksimalan ideal prstena M. M/m je polje. Homomorfizam $f : M \to M/m$ inducira homomorfizam $\bar{f} : M \to \Omega$, gdje je Ω algebarsko zatvorenje polja M/m. Prema teoremi 5.23. $\bar{f}$ se može produžiti do homomorfizma $g : B \to \Omega$, gdje je B valuacioni prsten polja k. Valuacioni prsten je lokalni prsten, sa jedinim maksimalnim idealom $\beta = Ker(g)$, pa B dominira nad M. Međutim, M je maksimalan element u Σ pa mora biti $M = B$.

Obrnuto, pretpostavimo da je prsten $M \in \Sigma$ valuacioni prsten polja k i neka prsten B dominira nad M. Ako je $M \subsetneq B$ onda postoji $x \in B \setminus M$ za koje $x^{-1} \in M$, pa je $1 = xx^{-1} \in B \cap m = \beta$ što je nemoguće jer je β maksimalan ideal prstena B. Dakle, M je maksimalni element skupa Σ.

9. Neka je k polje razlomaka oblasti A.

a) Dokazati da su slijedeća dva uslova ekvivalentna:

(i) A je valuacioni prsten polja k

(ii) Skup ideala prstena A je totalno uređen relacijom inkluzije.

b) Ako je A valuacioni prsten polja k, a γ prost ideal prstena A, tada su A/γ i A_γ valuacioni prsteni. Dokazati.

<u>Rješenje:</u>
a) $(i) \Rightarrow (ii)$ Neka su α_1 i α_2 ideali prstena A i neka $\alpha_1 \not\subsetneq \alpha_2$ i $\alpha_2 \not\subsetneq \alpha_1$. To znači da postoje $x \in \alpha_1 \setminus \alpha_2$ i $y \in \alpha_2 \setminus \alpha_1$. Međutim, A je valuacioni prsten, pa bar jedan od elemenata xy^{-1} ili $\left(xy^{-1}\right)^{-1} = x^{-1}y$ pripada prstenu A. Ovo znači da je $x = \left(xy^{-1}\right)y \in \alpha_2$ ili je $y = \left(yx^{-1}\right)x \in \alpha_1$, što je kontradikcija sa pretpostavkom. Dakle, skup ideala prstena A je totalno uređen relacijom inlkuzije.
$(ii) \Rightarrow (i)$ Pretpostavimo da je skup ideala prstena A totalno uređen relacijom inkluzije i neka je $v \in k \setminus \{0\}$ proizvoljno. $v = xy^{-1}$ $(x, y \in A)$. Za ideale (x) i (y) važi da je $(x) \subseteq (y)$ ili je $(y) \subseteq (x)$, pa mora biti $z = xy^{-1} \in A$ ili $z^{-1} = yx^{-1} \in A$, što znači da je A valuacioni prsten polja k.
b) Neka je A valuacioni prsten polja k, a γ prost ideal prstena A. Između ideala prstena A/γ i ideala prstena A (koji sadrže ideal γ) postoji obostrano jednoznačna korespondencija koja čuva relaciju inkluzije, pa kako je skup ideala prstena A totalno uređen, takav je i skup ideala prstena A/γ, što na osnovu a) znači da je A/γ valuacioni prsten (svog polja razlomaka) . Slično bi zaključivali i u slučaju prstena A_γ.

10. Ako je A valuacioni prsten polja k dokazati da svaki potprsten polja k koji sadrži A ima oblik A_γ (za neki ideal γ prstena A).

<u>Rješenje:</u>
Neka je B potprsten polja k, a m maksimalan ideal prstena B, tada je $\beta = m \cap A$ prost ideal prstena A, pa ako $x \in A \setminus \beta$ onda $x \in B \setminus m$, pa $x^{-1} \in B$. Dakle, $B = A_\beta$.

11. Neka je A valuacioni prsten polja k, U grupa jedinica prstena A, k^* multiplikativna grupa polja k, a $v : k^* \to k^*/U$ prirodni homomorfizam. Stavimo da je $k^*/U = \Gamma$ i definišimo relaciju $\leq$ ovako: $v(x) \leq v(y) \Leftrightarrow xy^{-1} \in A$.Dokazati:

a) $(\Gamma, \leq)$ je totalno uređena grupa;

b) $v(x+y) \geq \min\{v(x), v(y)\}$ $(\forall x, y \in k^*)$.

Rješenje:

a) Jednostavno se provjerava da je ovako definisana relacija $\leq$ relacija poretka. Pokažimo još da je kompatibilna sa operacijom u grupi Γ. Neka je $a_1 \leq b_1$ i $a_2 \leq b_2$. To znači da postoje $x_1, x_2, y_1, y_2 \in k^*$ za koje je $v(x_1) = a_1, v(x_2) = a_2, v(y_1) = b_1, v(y_2) = b_2$, pa iz $v(x_1) \leq v(y_1)$ i $v(x_2) \leq v(y_2)$ slijedi $x_1 y_1^{-1} \in A$ i $x_2 y_2^{-1} \in A$. Sada i $x_1 x_2 (y_1 y_2)^{-1} \in A$, što znači da je $v(x_1 x_2) \leq v(y_1 y_2)$, a kako je v homomorfizam, odavde konačno imamo da je $a_1 a_2 \leq b_1 b_2$. Dakle, $(\Gamma, \leq)$ je totalno uređena grupa.

b) Jedan od elemenata xy^{-1} ili $x^{-1}y$ sigurno pripada prstenu A, a bez ograničenja opštosti možemo pretpostaviti da je to $x^{-1}y$. To znači da je $v(y) \leq v(x)$, pa je $v(y) = \min\{v(x), v(y)\}$. Sada iz $(x+y)x^{-1} = yx^{-1} + 1 \in A$ slijedi da je $v(x+y) \geq v(x) = \min\{v(x), v(y)\}$.

12. Neka je Γ aditivna totalno uređena Abelova grupa, a k polje. Valuacija polja k sa vrijednostima u Γ je preslikavanje koje ima slijedeće osobine:

$$(i) \quad v(xy) = v(x) + v(y);$$

$$(ii) \quad v(x+y) \geq \min\{v(x), v(y)\};$$

Dokazati da je skup $A = \{x \in k^* : v(x) \geq 0\} \cup \{0\}$ valuacioni prsten polja k.

Rješenje:

Najprije, skup A je zatvoren za sabiranje i množenje, jer ako $x, y \in A$, tj. ako je $v(x) \geq 0$ i $v(y) \geq 0$ iz $v(x+y) \geq \min\{v(x), v(y)\}$ i $v(xy) = v(x) + v(y)$ dobijamo da je $v(x+y) \geq 0$ i $v(xy) \geq 0$, pa i $x+y, xy \in A$. Takođe, $1 \in A$, jer iz $v(1) = v(1 \cdot 1) = v(1) + v(1)$ slijedi da je $v(1) = 0$. Znači, A je potprsten polja k^*. Neka je $x \in k^* \setminus A$. To znači da je $v(x) < 0$. Iz $v(x) + v(x^{-1}) = v(xx^{-1}) = v(1) = 0$ slijedi da je $v(x^{-1}) \geq 0$, pa $x^{-1} \in A$. Dakle, A je valuacioni prsten polja k^*.