Determinante n-tog reda

III Metod rekurzivnih relacija

U ovom metodu datu determinantu razvijemo po vednoj od vrsta ili kolona i prikažemo u vidu linearne kombinacije determinanti istog oblika ali nižeg reda. Na ovaj način ćemo dobiti rekurzivnu relaciju pomoću koje možemo izračunati determinantu, tj. dobit ćemo diferencnu jednačinu koju treba riješiti. Nekada je , empirijskom indukcijom, računajući $D_1, D_2, D_3 \ldots$ moguće naslutiti opšti oblik za D_n, što onda dokažemo matematičkom indukcijom. Uglavnom se ovi postupci kombinuju.

Posmatrajmo sada specijalan slučaj u opštem obliku.
Neka je rekurzivna relacija data sa:

$$(1)\quad D_n = pD_{n-1} + qD_{n-2}, \quad n > 2$$

gdje su p, q konstante koje ne zavise od n.

Ako je $q = 0$ onda je $\quad D_n = p^{n-1}D_1 = p^{n-1}a_{11} \quad (D_1 = a_{11})$.

Pretpostavimo da su p i q različiti od nule. Sa α i β označimo korijene jednačine

$$x^2 - px - q = 0$$

tada je $\alpha + \beta = p$ i $\alpha\beta = -q$, pa (1) možemo napisati u obliku:

$$(2)\quad D_n - \beta D_{n-1} = \alpha\left(D_{n-1} - \beta D_{n-2}\right) \text{ ili}$$

$$(3)\quad D_n - \alpha D_{n-1} = \beta\left(D_{n-1} - \alpha D_{n-2}\right)$$

Pretpostavimo da je $\alpha \neq \beta$. Po formuli za $n-1$- ti član geometrijskog niza , iz (2) dobijamo:

$$D_n - \beta D_{n-1} = \alpha^{n-2}\left(D_2 - \beta D_1\right),$$

a iz (3) je:

$$D_n - \alpha D_{n-1} = \beta^{n-2}\left(D_2 - \alpha D_1\right).$$

Odavde je

$$D_n = \frac{1}{\alpha - \beta}\left(\alpha^{n-1}\left(D_2 - \beta D_1\right) - \beta^{n-1}\left(D_2 - \alpha D_1\right)\right), \text{ tj.}$$

$$D_n = C_1\alpha^n + C_2\beta^n,$$

gdje je $\quad C_1 = \dfrac{D_2 - \beta D_1}{\alpha(\alpha - \beta)} \quad$ i $\quad C_2 = -\dfrac{D_2 - \alpha D_1}{\beta(\alpha - \beta)}$.

Pokazali smo da ovo vrijedi za $n > 2$, a jednostavno se uvjeriti da vrijedi i za $n = 1$ i $n = 2$.

Pretpostavimo sada da je $\alpha = \beta$. (2) i (3) sada postaju jedna jednakost, i to

$$D_n - \alpha D_{n-1} = \alpha\left(D_{n-1} - \alpha D_{n-2}\right)$$

Ako stavimo da je $A = D_2 - \alpha D_1$, onda iz prethodna jednakost postaje:

$$(4)\quad D_n - \alpha D_{n-1} = \alpha^{n-2}A$$

Zamjenom n sa $n-1$ u (4) dobijamo:

$$(5)\quad D_{n-1}-\alpha D_{n-2}=\alpha^{n-2}A$$

ako ponožimo (5) sa α i saberemo sa (4) dobit ćemo:

$$(6)\quad D_{n-1}=\alpha D_{n-2}+\alpha^{n-3}A$$

Uvrštavajući (6) u (4) dobijamo

$$(7)\quad D_n=\alpha^2 D_{n-2}+2\alpha^{n-2}A.$$

Nastavljajući ovako dalje, na kraju bi dobili

$$D_n=\alpha^{n-1}D_1+(n-1)\alpha^{n-2}A,\quad \text{ili}$$

$$D_n=\alpha^n\left[(n-1)C_1+C_2\right],$$

gdje smo stavili da je $C_1=\dfrac{A}{\alpha^2}$ i $C_2=\dfrac{D_1}{\alpha}$ (jer je zbog $q\neq 0$ i $\alpha\neq 0$).

1. Primjenom rekurzivnog metoda izračunati vrijednost determinante:

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & x & x & \cdots & x \\ x & a_2 & x & \cdots & x \\ x & x & a_3 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x & x & x & \cdots & a_n \end{vmatrix}.$$

2. Izračunati vrijednost determinante:

a) $$D_n=\begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

b) $$D_{n+1}=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ -y_1 & x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -y_2 & x_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_n \end{vmatrix}.$$

3. Izračunati determinante:

a) $$D_n=\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha+\beta \end{vmatrix},$$

b) $$D_n=\begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

gdje je $\alpha\neq\beta$.

4. Riješiti po x jednačinu stepena n:

$$D \equiv \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \cdots & x^n \\ 1 & a_1 & a_1^{\ 2} & \cdots & a_1^{\ n} \\ 1 & a_2 & a_2^{\ 2} & \cdots & a_2^{\ n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^{\ 2} & \cdots & a_n^{\ n} \end{vmatrix} = 0$$

gdje su $a_1, a_2, ..., a_n$ međusobno različiti brojevi.

5. Izračunati determinantu:

$$D_n = \begin{vmatrix} a+1 & a & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a+1 & a & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & a+1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+1 \end{vmatrix}.$$