Determinante n-tog reda

IV Metod reprezentacije determinante u vidu sume determinanti

Ovaj se metod sastoji u razlaganju determinante na sumu determinanti koje lakše možemo izračunati.

1. Izračunati determinantu:

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & \cdots & a_1+b_n \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_2+b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix}$$

V Metod izmjene elemenata dterminante

Metod promjene elemenata determinante primjenjuje se onda kada pomoću izmjene svih elemenata determinante dodavanjem ili oduzimanjem istog broja ili promjenjive tu determinantu dovedemo na oblik podesan za računanje.
Ako je

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{i} \quad D_n' = \begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12}+x & \cdots & a_{1n}+x \\ a_{21}+x & a_{22}+x & \cdots & a_{2n}+x \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}+x & a_{n2}+x & \cdots & a_{nn}+x \end{vmatrix},$$

onda je $D_n' = D + x\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}$, gdje su A_{ij} kofaktori elemenata determinante D.
Ovaj rezultat dobijamo tako što determinantu D' razložimo na sumu dvije determinante po prvoj koloni, pa te dvije determinante razložimo na sumu po drugoj koloni, pa ove determinante po trećoj koloni... Detreminante koje u dvije ili više kolona imaju samo $x-$eve su jednake nuli. Odavde je $D' = D + \sum A_{ij}$, gdje su A_{ij} determinante koje u samo jednoj koloni imaju $x-$eve. Ako ove determinante razvijemo po ovim kolonama dobit ćemo da je zaista $D_n' = D + x\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}$. Na ovaj se način računanje determinante D' svodi na računanje determinante D i kofaktora njenih elemenata.

1. Metodom promjene elemenata determinante izračunati determinante:

a) $D_n' = \begin{vmatrix} a_1 & x & x & \cdots & x \\ x & a_2 & x & \cdots & x \\ x & x & a_3 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x & x & x & \cdots & a_n \end{vmatrix}$ b) $C_{n+1}' = \begin{vmatrix} x+1 & x & x & \cdots & x \\ x & x+2 & x & \cdots & x \\ x & x & x+2^2 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x & x & x & \cdots & x+2^n \end{vmatrix}$.

2. Izračunati determinantu:

$$D_n' = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

Množenje determinanti

3. Pomnožiti determinante na sva četiri načina i uvjeriti se da je determinanta proizvoda jednaka proizvodu determinanti:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}, \qquad D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}.$$

4. Izračunati determinantu predstavljajući je u vidu proizvoda dvije determinante:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \cdots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \cdots & 1+x_2y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \cdots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}.$$

5. Izračunati:

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \cdots & s_{n-1} & 1 \\ s_1 & s_2 & s_3 & \cdots & s_n & x \\ s_2 & s_3 & s_4 & \cdots & s_{n+1} & x^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ s_n & s_{n+1} & s_{n+2} & \cdots & s_{2n-1} & x^n \end{vmatrix},$$

gdje je $s_k = x_1^k + x_2^k + ... + s_n^k$.

6. Dokazati jednakost:

$$D_n = \begin{vmatrix} s-a_1 & s-a_2 & \cdots & s-a_n \\ s-a_n & s-a_1 & \cdots & s-a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ s-a_2 & s-a_3 & \cdots & s-a_1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}(n-1)\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_1 \end{vmatrix},$$

gdje je $s = a_1 + a_2 + ... + a_n$.

7. Izračunati:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \varepsilon^3 & \cdots & \varepsilon^{n-1} \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon^4 & \varepsilon^6 & \cdots & \varepsilon^{2(n-1)} \\ 1 & \varepsilon^3 & \varepsilon^6 & \varepsilon^9 & \cdots & \varepsilon^{3(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \varepsilon^{n-1} & \varepsilon^{2(n-1)} & \varepsilon^{3(n-1)} & \cdots & \varepsilon^{(n-1)^2} \end{vmatrix}$$

gdje je $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$.

8. Dokazati da je :

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \end{vmatrix} = f(\varepsilon_1) f(\varepsilon_2) \ldots f(\varepsilon_n)$$

gdje je $f(x) = a_1 + a_2 x + ... + a_n x^{n-1}$ i $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n$ sve različite vrijednosti $n-$tog korijena iz jedinice.

9. Izračunati determinantu:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 & \cdots & \alpha^{n-1} \\ \alpha^{n-1} & 1 & \alpha & \cdots & \alpha^{n-2} \\ \alpha^{n-2} & \alpha^{n-1} & 1 & \cdots & \alpha^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha & \alpha^2 & \alpha^3 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$