II KOLOKVIJ IZ UVODA U LINEARNU ALGEBRU

ZADACI

1. Neka je T operator na prostoru $\mathbb{R}^3$ definisan sa

$$T((x, y, z)) = (x + 2y + z, y + z, -x + 3y + 4z)$$

   a) Pokazati da je T linearan operator prostora $\mathbb{R}^3$;
   b) Naći matricu operatora T u odnosu na kanonsku bazu prostora $\mathbb{R}^3$;
   c) Odrediti bazu i dimenziju prostora $N(T)$ i $R(T)$;
   d) Ispitati da li je $\beta = \{(1, 0, 1), (-1, 2, 1), (2, 1, 1)\}$ baza prostora $\mathbb{R}^3$ i ako jeste naći matricu operatora T u odnosu na bazu β.

TEORIJA

1. Definisati sljedeće pojmove:
   a) Linearna transformacija;
   b) Dualni prostor;
   c) Proizvod matrica;
   d) Slične matrice
2. Dokazati sljedeće teoreme:

Teorema 0.1. *Neka su V i W konačno-dimenzionalni vektorski prostori sa uređenim bazama β i γ respektivno i neka su $T, U : V \to W$ linearne transformacije. Tada vrijedi:*

$$[T + U]_\beta^\gamma = [T]_\beta^\gamma + [U]_\beta^\gamma$$

Teorema 0.2. *Neka je V konačno-dimenzionalni vektorski prostor sa uređenom bazom $\beta = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Neka je f_i $(1 \le i \le n)$ $i-$ta koordinatna funkcija u odnosu na β i neka je $\beta^* = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$. Tada je β^* uređena baza za V^*, i za svako $f \in V^*$ imamo*

$$f = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) f_i$$