LINEARNI OPERATORI

1. Neka je $A:V\to V$ linearan operator na konačno-dimenzionlanom vektorskom prostoru V. Neka je $B=-A+E$, gdje je E jedinični operator prostora V. Ako je $A^2=A$, dokazati:
   a) $\operatorname{Im} A=Ker B$;
   b) $Ker A=\operatorname{Im} B$;
   c) $V=Ker A\oplus \operatorname{Im} A$.

2. Neka su A i B linearne transformacije vektorskog prostora V, takve de je $AB=BA$, $A^2=A$ i $B^2=B$. Dokazati da je:
   a) $Ker(AB)=Ker A+Ker B$;
   b) $\operatorname{Im}(AB)=\operatorname{Im} A\cap \operatorname{Im} B$.

3. Neka je A linearna transformacija konačno dimenzionalnog vektorskog prostora V, a W podprostor od V takav da je $V=W\oplus Ker A$. Ako je $(a_1,\dots,a_k)$ baza podprostora W, dokazati da je niz vektora $\left(A(a_1),\dots,A(a_k)\right)$ linearno nezavisan i da je $rang(A)=k$.

4. Neka su U,V i W konačno dimenzionalni vektorski prostori, a $A:U\to V$ i $B:V\to W$ linearne transformacije. Dokazati da je
   $rang(BA)\le \min\{rang(A), rang(B)\}$.

5. Neka su A i B linearne transformacije konačno dimenzionalnog vektorskog prostora V takve da je $V=\operatorname{Im}(A)\oplus \operatorname{Im}(B)=Ker(A)\oplus Ker(B)$. Dokazati da je $rang(A+B)=rang(A)+rang(B)$.

6. Dokazati da za linearan operator $L:V\to V$ važi $\operatorname{Im} L=\operatorname{Im} L^2$, ako i samo ako je $V=Ker L\oplus \operatorname{Im} L$.

7. Neka je V vektorski prostor polinoma u promjenljivoj x nad poljem $\mathbb{R}$ stepena ne većeg od tri. Dokazati da je sa $L(p)=(1-4x)p'+\left(x+x^2\right)p''+\left(x^3+x^2\right)p'''$ definisan jedan linearan operator $L:V\to V$, odrediti njegovu matricu u odnosu na kanonsku bazu prostora V, a zatim odrediti jezgro i sliku tog operatora.

8. Neka je (e_1,e_2,e_3) baza vektorskog prostora X, $f_1=3e_1-2e_2+e_3$, $f_2=e_1+e_2$ i $f_3=0$. Naći linearan operator $A:X\to X$ za koji je $A(e_i)=f_i$, $i=1,2,3$, a zatim naći $A(x)$ za $x=5e_1-2e_2+3e_3$.

9. Neka je $e_1=(1,0,0)$, $e_2=(0,1,0)$ i $e_3=(0,0,1)$ baza u prostoru $\mathbb{R}^3$ i $f_1=(1,0)$, $f_2=(0,1)$ baza u prostoru $\mathbb{R}^2$.

a) u navedenom paru baza matrici $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ pridružiti linearan operator A;

b) naći $A(x)$ za $x=(-2,1,7)$;

c) Naći matricu operatora A u odnosu na baze: (a_1,a_2,a_3) prostroa $\mathbb{R}^3$ i (b_1,b_2) prostora $\mathbb{R}^2$, ako je $a_1=(1,2,4)$, $a_2=(0,-2,5)$, $a_3=(-1,0,3)$ i $b_1=(2,1)$ i $b_2=(-1,1)$.

10. Neka je $e_1=(1,0,0)$, $e_2=(0,1,0)$ i $e_3=(0,0,1)$ baza u prostoru $\mathbb{R}^3$ i $f_1=(1,0)$, $f_2=(0,1)$ baza u prostoru $\mathbb{R}^2$. Neka su $A: X^3 \to X^2$ i $B: X^2 \to X^3$ operatori definisani sa: $A(e_1)=f_1+f_2$, $A(e_2)=f_1-f_2$, $A(e_3)=f_1$; $B(f_1)=e_1+e_2+e_3$, $B(f_2)=e_1-e_2+e_3$. . Naći $BA(5e_1-2e_2+3e_3)$ i matricu operatora BA u navedenim bazama. Da li je definisano AB?