XIV V J E Ž B E

LINEARNA PRESLIKAVANJA. MATRICA LINEARNOG PRESLIKAVANJA. ALGEBRA LINEARNIH PRESLIKAVANJA
- nastavak-

1. Dokazati da je preslikavanje H na prostoru matrica $M_2(\mathbb{R})$ definisano sa $H(A)=\frac{1}{2}\left(A+A^T\right)$ linearan operator. Naći natricu operatora H u kanonaskoj bazi prostora $M_2(\mathbb{R})$ i odrediti jezgro i sliku poeratora H. Provjeriti da li matrice $B_1=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}, B_2=\begin{bmatrix}1 & 3\\ -1 & 0\end{bmatrix}, B_3=\begin{bmatrix}0 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}$ i $B_4=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 3 & 4\end{bmatrix}$ obrazuju bazu prostora $M_2(\mathbb{R})$ i ako je to zadovoljeno naći matricu operatora H u toj bazi.

LINEARNI FUNKCIONALI. DUALNI PROSTOR

- Definicija linearnog funkcionala
- Definicija dualnog prostora i dualne baze
- Definicija anihilatora skupa S
- Definicija transponovanog preslikavanja

1. Neka su $\phi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ i $\psi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ linearni funkcionali definisani sa:
   $$\phi((x,y,z))=2x-3y+z$$
   $$\psi((x,y,z))=4x-2y+3z$$
   Naći: $\phi+\psi, 3\phi$ i $2\phi-5\psi$
2. Naći dualne baze u prostoru $\left(\mathbb{R}^3\right)^*$ za svaku od slijedećuh baza u prostoru $\mathbb{R}^3$:
   a) $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$;
   b) $\{(1,-2,3),(1,-1,1),(2,-4,7)\}$

3. Neka je V vektorski prostor polinoma u promjenljivoj t nad poljem $\mathbb{R}$ stepena manjeg od 2 i neka su ϕ_1 i ϕ_2 funkcionali na V definisani sa:
   $$\phi_1(f(t))=\int_0^1 f(t)dt \qquad \text{i} \qquad \phi_2(f(t))=\int_0^2 f(t)dt$$
   Naći bazu $\{v_1,v_2\}$ prostora V koja je dualna bazi $\{\phi_1,\phi_2\}$.

4. Neka je V vektorski prostor polinoma u promjenljivoj t nad poljem $\mathbb{R}$ stepena manjeg od 3 i neka su ϕ_1, ϕ_2 i ϕ_3 funkcionali na V definisani sa:

$$\phi_1(f(t)) = \int_0^1 f(t)dt \ , \quad \phi_2(f(t)) = f'(1) \quad \text{i} \quad \phi_3(f(t)) = f(0)$$

Naći bazu $\{f_1, f_2, f_3\}$ koja je dualna bazi $\{\phi_1, \phi_2, \phi_3\}$.

5. Neka su U i W podprostori vektorskog prostora V. Dokazati da je: $(U+W)^0 = U^0 \cap W^0$.

6. Neka je W podprostor prostora $\mathbb{R}^4$ generisan vektorima $v_1 = (1,2,-3,4)$ i $v_2 = (0,1,4,-1)$. Naći bazu podprostora W^0 od $(\mathbb{R}^4)^*$.

7. Neka je ϕ linearan funkcional na $\mathbb{R}^2$ definisan sa $\phi((x,y)) = x - 2y$.
   Za svako od slijedećih linearnih preslikavanja $A: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ naći transponovani operator $A^T(\phi)((x,y))$:
   a) $A((x,y)) = (x,0)$;
   b) $A((x,y)) = (y, x+y)$;
   c) $A((x,y)) = (2x-3y, 5x+2y)$