# MODULI

**1.** Ako su $m$ i $n$ relativno prosti brojevi, dokazati da je $\left(Z/Zm\right)\otimes_Z\left(Z/Zn\right)=0$.

Rješenje:
Kako su $n$ i $m$ uzajamno prosti brojevi, to postoje cijeli brojevi $k$ i $l$ takvi da je $mk+nl=1$. Modul $\left(Z/Zm\right)\otimes_Z\left(Z/Zn\right)=0$ je generisan elementima oblika $x\otimes_Z y$, gdje $x\in Z/mZ$ i $y\in Z/nZ$. Međutim,

$x\otimes_Z y=1\left(x\otimes_Z y\right)=\left(km+\ln\right)\left(x\otimes_Z y\right)=$

$=\left(kmx+\ln x\right)\otimes_Z y=\left(kmx\right)\otimes_Z y+\left(\ln x\right)\otimes_Z y=$

$=\left(kmx\right)\otimes_Z y+x\otimes_Z\left(\ln y\right)=0$

Dakle, $\left(Z/Zm\right)\otimes_Z\left(Z/Zn\right)=0$.

**2.** Neka je $\alpha$ ideal prstena $A$, a $M$ A-modul. Dokazati da je $\left(A/\alpha\right)\otimes_A M\cong M/\alpha M$.

Rješenje:
Niz $0\to\alpha\xrightarrow{f}A\xrightarrow{g}A/\alpha\to 0$ je egzaktan (jer je $Ker\left(g\right)=\operatorname{Im}\left(f\right)=\alpha$, $f$ je ulaganje, a $g$ prirodni epimorfizam), pa je prema propoziciji 2.18. i niz

$0\to\alpha\otimes_A M\xrightarrow{f\otimes 1}A\otimes_A M\xrightarrow{g\otimes 1}A/\alpha\otimes_A M\to 0$ takođe egzaktan. Ovo znači da je $A\otimes_A M/\alpha\otimes_A M\cong A/\alpha\otimes_A M$, tj, $M/\alpha M\cong A/\alpha\otimes_A M$, što je i trebalo dokazati.

**3.** Neka je $A$ lokalni prsten, a $M$ i $N$ konačno generisani A-moduli. Dokazati:
$M\otimes_A N=0\Rightarrow M=0\vee N=0$.

Rješenje:
$A$ je lokalni prsten, pa ima jedinstven maksimalan ideal $m$. Ovo znači da je $A/m$ polje. Označimo ga sa $K$. Ako je $M\otimes_A N=0$ onda je i $\left(M\otimes_A N\right)_K=K\otimes_A\left(M\otimes_A N\right)=0$, pa je i $M_k\otimes_A N=\left(K\otimes_A M\right)\otimes_A N=0$. Ovo je moguće samo ako je $M_K=0$ ili $N=0$. Prema zadatku 2 imamao da je $M_K\cong M/\alpha M$, a iz Nakayamine leme iz $M_k=0$ slijedi da je $M=0$. Dakle, ako je $M\otimes_A N=0$ onda je $M=0$ ili $N=0$.

**4.** Neka je $A\left[x\right]$ prsten polinoma , a $M$ A-modul. Sa $M\left[x\right]$ označimo skup svih objekata oblika $m_0+m_1x+...+m_rx_r$ ( $m_i\in M$, $r$ -cio negativan broj). Na prirodan način definisati

sabiranje u $M[x]$ nad $A[x]$, pa dokazati da je $M[x]$ $A[x]$- modul, te
$M[x] \cong A[x] \otimes_A M$ .

Rješenje:

Neka su $\sum_{i=0}^{n} m_i x^i$ i $\sum_{i=0}^{p} n_i x^i$ elementi skupa $M[x]$. Bez ograničenja opštosti možemo pretpostaviti da je $n = p$ jer , ukoliko je na primjer $n < p$ stavljamo da je $n_i = 0$ za $p < i \le n$ .
Definišimo operaciju sabiranja u $M[x]$ na sljedeći način

$$\sum_{i=0}^{n} m_i x^i + \sum_{i=0}^{n} n_i x^i = \sum_{i=0}^{n} (m_i + n_i) x^i .$$

Jednostavno se pokazuje da je ovako definisana operacija sabiranja u $M[x]$ naslijedila sve osobine istoimene operacije u skupu $M$ , pa je $(M[x], +)$ Abelova grupa.
Definišemo li operaciju množenja elementa skupa $M[x]$ elementom iz $A[x]$ sa

$$\sum_{i=0}^{k} a_i x^i \cdot \sum_{i=0}^{n} m_i x^i = \sum_{i=0}^{n+k} c_i x^i \text{ , gdje je } c_i = \sum_{j+l=i} a_j m_l \quad i = 0,1,...,n+k$$

onda se lako pokazuje da je $M[x]$ $A[x]$-modul.

Definišimo preslikavanje $f : M[x] \to A[x] \otimes_A M[x]$ sa $f\left(\sum_{i=0}^{n} m_i x^i\right) = \sum_{i=0}^{n} m_i \otimes_A x^i$ i pokažimo da je $f$ bijektivan homomorfizam.
Najprije, $f$ je homomorfizam jer,

$$f\left(\sum_{i=0}^{n} m_i x^i + \sum_{i=0}^{n} n_i x^i\right) = f\left(\sum_{i=0}^{n} (m_i + n_i) x^i\right) = \sum_{i=0}^{n} (m_i + n_i) \otimes_A x^i =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} m_i \otimes_A x + \sum_{i=0}^{n} n_i \otimes_A x = f\left(\sum_{i=0}^{n} m_i x^i\right) + f\left(\sum_{i=0}^{n} n_i x^i\right)$$

i $$f\left(a \sum_{i=0}^{n} m_i x^i\right) = f\left(\sum_{i=0}^{n} (a m_i) x^i\right) = \sum_{i=0}^{n} (a m_i) \otimes_A x^i = a \sum_{i=0}^{n} m_i \otimes_A x^i = af\left(\sum_{i=0}^{n} m_i x^i\right)$$

Dalje, $f$ je sirjektivno jer, ako je $z \in A[x] \otimes_A M[x]$ proizvoljno, onda je

$$z = \left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right) \otimes_A m = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \otimes_A m = \sum_{i=0}^{n} x^i \otimes_A (a_i m) = \sum_{i=0}^{n} x^i \otimes_A m_i \quad \text{gdje smo stavili da je}$$

$m_i = a_i m \quad i = 0,1,...,n$ . Ako je sada $\sum_{i=0}^{n} m_i x^i \in M[x]$ , $m_i = a_i m \quad i = 0,1,...,n$ onda imamo

$$f\left(\sum_{i=0}^{n} m_i x^i\right) = z .$$

Pokažimo da je $f$ i injektivno.

Definišimo preslikavanje $g : A[x] \otimes_A M[x] \to M[x]$ sa $g\left(\left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right) \otimes_A m\right) = \sum_{i=0}^{n} (a_i m) x^i$

$g$ je dobro definisano, jer ako je $g\left(\left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right) \otimes_A m\right) = g\left(\left(\sum_{i=0}^{n} b_i x^i\right) \otimes_A \overline{m}\right)$ onda je i

$\sum_{i=0}^{n}\left(b_i\overline{m}\right)x^i=\sum_{i=0}^{n}\left(a_i m\right)x^i$ , pa je i $a_i m=b_i\overline{m}\quad\forall i=0,1,...,n$ . Sada imamo

$a_i m=b_i\overline{m}\left(\forall i=0,1,...,n\right)\Rightarrow\sum_{i=0}^{n}x^i\otimes_A(b_i\overline{m})=\sum_{i=0}^{n}x^i\otimes_A(a_i m)\Rightarrow$

$\Rightarrow\left(\left(\sum_{i=0}^{n}a_i x^i\right)\otimes_A m\right)=\left(\left(\sum_{i=0}^{n}b_i x^i\right)\otimes_A\overline{m}\right)$

Osim toga , vrijedi i $h\circ f\left(M\left[x\right]\right)=M\left[x\right]$ tj, $h\circ g=id_{M[x]}$ što znači da je $f$ injektivno preslikavanje.

Iz svega zaključujemo da je $f:M\left[x\right]\rightarrow A\left[x\right]\otimes_A M\left[x\right]$ izomorfizam, tj, da je $M\left[x\right]\cong A\left[x\right]\otimes_A M$ .

**5.** Neka je $\gamma$ prost ideal prstena $A$. Dokazati da je $\gamma\left[x\right]$ prost ideal prstena $A\left[x\right]$. Ako je $m$ maksimalan ideal prstena $A$, da li je $m\left[x\right]$ maksimalan ideal prstena $A\left[x\right]$?

Rješenje:

Neka je $\gamma$ prost ideal prstena $A$ i neka $fg\in\gamma\left[x\right]$, gdje je $f=\sum_{i=0}^{n}a_i x^i$ i $g=\sum_{i=0}^{m}b_i x^i$ . Ako stavimo da je $fg=\sum_{k=0}^{m+n}c_k x^k$, gdje je $c_k=\sum_{i+j=k}a_i b_j$ onda iz $fg\in\gamma\left[x\right]$ imamo da $c_k\in\gamma\left(k=0,...,m+n\right)$. $c_0=a_0 b_0$, a ako $a_0\notin\gamma$, onda zbog toga sto je $\gamma$ prost ideal imamo da $b_0\in\gamma$. Iz $c_1=a_0 b_1+a_1 b_0\in\gamma$, $b_0\in\gamma$ i $a_0\notin\gamma$ zaključujemo da $b_1\in\gamma$. Pretpostavimo da smo dokazali da $b_0,b_1,...,b_k\in\gamma$. Kako je $c_{k+1}=a_0 b_{k+1}+a_1 b_k...+b_1 a_k+a_{k+1}b_0\in\gamma$, i $\gamma$ prost ideal, to i $b_{k+1}\in\gamma$. Dakle, $b_i\in\gamma\left(i=0,...,n+m\right)$, tj. $g\in\gamma\left[x\right]$, što znači da je $\gamma\left[x\right]$ prost ideal prstena $A\left[x\right]$.

Ako je $m$ maksimalan ideal prstena $A$ onda $m\left[x\right]$ ne mora biti maksimalan ideal prstena $A\left[x\right]$. Naime, $m\left[x\right]$ je strogo sadržano u idealu $m+\left(x\right)$, a ovaj je ideal strogo sadržan u $A\left[x\right]$.

**6.** a) Ako su $M$ i $N$ glatki A-moduli, tada je to i $N\otimes_A M$ ;
b) Ako je $B$ glatka A-algebra, a $N$ gladak B-modul, tada je i A-modul $N$ gladak.

Rješenje:

a) Pretpostavimo da su A-moduli $M$ i $N$ glatki i uzmimo proizvoljan egzaktan niz A-modula $0\rightarrow P'\rightarrow P\rightarrow P''\rightarrow 0$. $M$ je gladak A-modul pa je i niz $0\rightarrow M\otimes_A P'\rightarrow M\otimes_A P\rightarrow M\otimes_A P''\rightarrow 0$ egzaktan, a kako je i A-modul $N$ gladak i niz $0\rightarrow N\otimes_A\left(M\otimes_A P'\right)\rightarrow N\otimes_A\left(M\otimes_A P\right)\rightarrow N\otimes_A\left(M\otimes_A P''\right)\rightarrow 0$ A-modula je takođe egzaktan. Sada je, prema propoziciji 2. 14. b) i niz A-modula

$0 \to (N \otimes_A M) \otimes_A P' \to (N \otimes_A M) \otimes_A P \to (N \otimes_A M) \otimes_A P'' \to 0$ egzaktan što znači da je modul $N \otimes_A M$ egzaktan.

b) Neka su $M$ i $M'$ A-moduli, a $f : M \to M'$ injektivni A-homomorfizam. $B$ je glatka A-algebra, pa je po propoziciji 2.19. A-homomorfizam $f \otimes_A 1 : M \otimes_A B \to M' \otimes_A B$ injektivan. Homomorfizam $f \otimes_A 1$ se na prirodan način može shvatiti i kao B-homomorfizam. $N$ je gladak B-modul, pa opet po istoj propoziciji zaključujemo da je B-homomorfizam $(f \otimes_A 1) \otimes_B 1 : (M \otimes_A B) \otimes_B N \to (M' \otimes_A B) \otimes_B N$ injektivan. Primjenimo li sada kanonski izomorfizam iz propozicije 2. 14. zaključujemo da je i A-homomorfizam $f \otimes_A 1 : M \otimes_A N \to M' \otimes_A N$ injektivan, što znači da je A-modul $N$ gladak.

**7.** Neka je $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ egzaktni niz A-modula. Ako su $M'$ i $M''$ konačno generisani A-moduli, dokazati da je i $M$ konačno generisan A-modul.

Rješenje:
Dokažimo najprije da vrijedi:
Ako su $M$ i $M''$ moduli nad prstenom $A$ i $M''$ konačno generisan, onda za svaki epimorfizam $g : M \to M''$ postoji podmodul $\bar{M}$ modula $M$ takav da vrijedi: $M = \bar{M} \dot{+} Ker(g)$.
Naime,
svaki konačno generisani modul $M''$ ima konačnu bazu. Neka je $m_1'', m_2'', ..., m_n''$ baza modula $M''$. $g$ je epimorfizam, pa postoje elementi $m_1, m_2, ..., m_n \in M$ takvi da je $m_i'' = g(m_i)$ $i = 1, 2, ..., n$. Za ovako odabrane elemente $m_1, m_2, ..., m_n \in M$ postoji homomorfizam $h : M'' \to M$ definisan sa $h(m_i'') = m_i$ $i = 1, 2, ..., n$. Kako je $(g \circ h)(m_i'') = m_i''$ $i = 1, 2, ..., n$ to je $g \circ h = id_{M''}$. Stavimo da je $\bar{M} = \mathrm{Im}(h)$ i pokažimo da je $M = \bar{M} \dot{+} Ker(g)$, a $M'' \cong \bar{M}$. Stvarno, $g(\bar{M}) = (g \circ h)(M'') = id_{M''}(M'') = M'' = \mathrm{Im}(g)$. Prema tome, za svako $m \in M$ postoji $\bar{m} \in \bar{M}$ takvo da je $g(m) = g(\bar{m})$ tj, za koje je $m - \bar{m} = \tilde{m} \in Ker(g)$. Dakle, $m = \bar{m} + \tilde{m} \in \bar{M} + Ker(g)$. Ako dokažemo da je $\bar{M} \cap Ker(g) = \{0_M\}$, biće

$g : \bar{M} \to M''$ izomorfizam, a $M = \bar{M} \dot{+} Ker(g)$.
Neka je $x \in \bar{M} \cap Ker(g)$. Tada je $g(x) = 0_{M''}$. Sa druge je strane $x = h(y)$ za neko $y \in M''$. Zato je $y = id_{M''}(y) = g(h(y)) = g(x) = 0_{M''}$. Konačno, $x = h(y) = 0_M$, što je i trebalo dokazati.

Vratimo se sada zadatku. Niz $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ je egzaktan, što znači da je $g : M \to M''$ epimorfizam i $Ker(g) = Im(f)$. Prema upravo dokazanom imamo da je

$M = \bar{M} \dot{+} Ker(g) = \bar{M} \dot{+} \mathrm{Im}(f)$. Moduli $M''$ i $M'$ su konačno generisani što znači da imaju konačne baze pa su i $\mathrm{Im}(f)$ i $\mathrm{Im}(g)$ konačno generisani moduli, tj, $M$ je konačno generisan. Ako je $m_1', m_2', ..., m_p'$ baza modula $M'$, $m_1'', m_2'', ..., m_n''$ baza modula $M''$ onda je $f(x_1'), f(x_2'), ..., f(x_p'), m_1, m_2, ..., m_n$ baza modula $M$, gdje je $m_i'' = g(m_i)$ $i = 1, 2, ..., n$.

**8.** Neka je $A$ prsten, a $\alpha$ ideal sadržan u Jacobsonovom radikalu prstena $A$. Neka je $M$ A-modul, $N$ konačno generisani A-modul, a $f : M \to N$ -homomorfizam. Ako je inducirani homomorfizam $f : M / \alpha M \to N / \alpha N$ sirjektivan, dokazati da je i $f$ sirjektivan.

Rješenje:
Ako je homomorfizam $\overline{f} : M / \alpha M \to N / \alpha N$ sirjektivan onda je $\operatorname{Im}(\overline{f}) = N / \alpha N$. Sa druge je strane $\operatorname{Im}(\overline{f}) = (\operatorname{Im}(f) + \alpha N) / \alpha N$ pa je, prema tome, $(\operatorname{Im}(f) + \alpha N) / \alpha N = N / \alpha N$ tj. $\operatorname{Im}(f) + \alpha N = N$. $\alpha$ je po pretpostavci sadržano u Jacobsonovom radikalu, a $N$ je konačno generisan modul, pa su ispunjeni svi uslovi posljedice 2.7. odakle imamo da je $\operatorname{Im}(f) = N$, što znači da je $f$ sirjektivan homomorfizam.

**9.** Neka je $A \neq \{0\}$ prsten. Dokazati:

a) Ako je $f : A^m \to A^n$ A-izomorfizam, tada je $m = n$;
b) Ako je A-homomorfizam $f : A^m \to A^n$ sirjektivan, tada je $m \geq n$;
c) Ako je A-homomorfizam $f : A^m \to A^n$ injektivan, da li je $m \leq n$?

Rješenje:
a) Prsten $A \neq 0$ pa ima bar jedan maksimalan ideal. Neka je to $m$. Tada je $N = M / m$ polje, a znamo da je $N \otimes_N A^m \cong A^m$ i $N \otimes_N A^n \cong A^n$, a osim toga, $N \otimes_N A^m$ i $N \otimes_N A^n$ su vektorski prostori. Satvimo da je $h = 1 \otimes f$, $h : N \otimes A^m \to N \otimes A^n$ i pokažimo da je $h$ izomorfizam ako je $f$ izomorfizam.
Zaista, uzmimo $\overline{a} \in A^n$ i $n \in N$ proizvoljno. Kako je $f$ po pretpostavci sirjektivno znamo da postoji $a \in A^m$ takvo da je $f(a) = \overline{a}$. Sada je $h(n \otimes a) = (1 \otimes f)(n \otimes a) = n \otimes f(a) = n \otimes \overline{a}$, a kako elementi oblika $n \otimes \overline{a}$ generišu prostor $N \otimes_N A^n$ zaključujemo da je $h$ sirjektivno prslikavanje.
Označimo sa $C = \operatorname{Im}(f)$ i pretpostavimo da je $f$ injektivan homomorfizam. Tada je $\overline{h} : N \otimes A^m \to N \otimes C$, prema prethodno dokazanom, sirjektivno , pa možemo definisati preslikavanje $\overline{g} : N \otimes C \to N \otimes A^m$ stavljajući $\overline{g}(b \otimes \overline{a}) = b \otimes a$ gdje je $f(a) = \overline{a}$. Sada je $\overline{g} \circ h : N \otimes A^m \to N \otimes A^m$ i takvo da vrijedi
$(\overline{g} \circ h)(n \otimes a) = \overline{g}\left(h(n \otimes a)\right) = \overline{g}\left(n \otimes f(a)\right) = \overline{g}\left(n \otimes \overline{a}\right) = b \otimes a$. Ovo znači da je $\overline{g} \circ h = id_{N \otimes A^m}$ čime smo dokazali da je $h$ injektivno.
Jednostavno se provjerava da je $h$ homomorfizam. Dakle, ako je $f : A^m \to A^n$ izomorfizam, onda je i $h : N \otimes A^m \to N \otimes A^n$ takođe izomorfizam, a kako izomorfni vektorski prostori imaju jdnake dimenzije to onda mora vrijediti $m = n$.

b) Već smo dokazali (pod a) ) da iz sirjektivnosti homomorfizma $f$ slijedi sirjektivnost homomorfizma $h$, pa prema tome, mora vijediti $m \geq n$.

c) Već smo dokazali (pod a) ) da iz injektivnosti homomorfizma $f$ slijedi injektivnost homomorfizma $h$, pa prema tome, mora vrijediti $n \le m$.

**10.** Ako je $M$ konačno generisani A modul, a $f : M \to A^n$ sirjektivni A-homomorfizam, dokazati da je A-modul $Ker(f)$ konačno generisan.

Rješenje:
Neka je $a_1, a_2, ..., a_n$ baza A-modula $A^n$. $f$ je sirjektivno pa postoje $m_1, m_2, ..., m_n \in M$ takvi da je $f(m_i) = a_i$ $i = 1, 2, ..., n$. U ovom je slučaju (zadatak 9.) $M$ direktna suma podmodula $Ker(f)$ i podmodula $\bar{M}$ generisanog elelmentima $m_1, m_2, ..., m_n$. $M$ je komačno generisan, po pretpostavci, pa ima konačnu bazu. Neka je $c_1, c_2, ..., c_p$ baza modula $M$. Svako $c_i$ $i = 1, 2, ..., p$ se može napiasti u obliku $c_i = d_i + e_i$ $i = 1, 2, ..., p$, gdje $d_i \in \bar{M}$, a $e_i \in Ker(f)$. Jasno, elementi $e_1, e_2, ..., e_p$ čine generator A-modula $Ker(f)$, pa je on konačno generisan.

**11.** Neka je $f : A \to B$ homomorfizam prstena, a $N$ B-modul. Posmatrajmo $N$ kao A-modul nastao restrikcijom skalara i formirajmo B-modul $N_B = B \otimes_A N$. Dokazati da je preslikavanje $g : N \to N_B$, zadano sa $g(y) = 1 \otimes_A y$ injektivan A-homomorfizam,a $\mathrm{Im}(g)$ direktni sumand od $N_B$.

Rješenje:
Pokažimo najprije da je $g$ A-homomorfizam. Imamo:
$g(y_1 + y_2) = 1 \otimes_A (y_1 + y_2) = (1 \otimes_A y_1) + (1 \otimes_A y_2) = g(y_1) + g(y_2)$ i
$g(ay) = 1 \otimes_A (ay) = a(1 \otimes_A y) = ag(y)$.
Definišimo preslikavanje $h : N_B \to N$ sa $h(b \otimes_A y) = by$ i pokažimo da je i $h$ A-homomorfizam. Naime,
$h\left(b_1 \otimes_A y_1 + b_2 \otimes_A y_2\right) = h\left(1 \otimes_A \left(b_1 y_1 + b_2 y_2\right)\right) = b_1 y_1 + b_2 y_2 = h\left(b_1 \otimes_A y_1\right) + h\left(b_2 \otimes_A y_2\right)$ i
$h\left(a\left(b \otimes_A y\right)\right) = h\left(b \otimes_A (ay)\right) = bay = aby = ah\left(b \otimes_A y\right)$.
Sad je $\left(h \circ g\right)(y) = h(g(y)) = h(1 \otimes_A y) = y$, što znači da je $h \circ g = id_N$ tj, $g$ je injektivan homomorfizam. Kako je ,osim toga, $b \otimes_A y = 1 \otimes_A by + (b \otimes_A y - 1 \otimes_A by)$ to je jasno da vrijedi i $N_B = \mathrm{Im}(g) \dot{+} Ker(h)$.