PRIMARNA DEKOMPOZICIJA IDEALA

1. Ako je $\alpha = r(\alpha)$, dokazati da α nema umetnutih prostih ideala.

Rješenje:

Neka je $\alpha = \bigcap_{i=1}^{n} \mu_i$ reducirana primarna dekompozicija ideala α i ζ_i umetnuti prosti ideal. Tada je : $\mu_i \supseteq \alpha = r(\alpha) = r\left(\bigcap_{j=1}^{n} \mu_j\right) = \bigcap_{j=1}^{n} r(\mu_j) = \bigcap_{j=1}^{n} \zeta_j = \bigcap_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \zeta_j \supseteq \bigcap_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \mu_j$, što je nemoguće. Dakle, α nema umetnutih prostih ideala.

2. Neka je $A = Z[t]$ prsten polinoma. Dokazati da je $m = (2,t)$ maksimalan, a $\zeta = (4,t)$ m-primaran ideal, ali ζ nije potencija ideala.

Rješenje:

Definišemo li preslikavanje $f : Z[t]/m \to Z/(2)$, sa $f(x+m) = x + (2)$ onda se jednostavno provjerava da je f izomorfizam, a kako je $Z/(2)$ polje to je i $Z[t]/m$ takođe polje, pa je ideal m maksimalan. Dalje je $r(\zeta) = \{p(t) \in Z[t] : \exists n \in N, p^n(t) \in \zeta\}$ odakle se vidi da je $r(\zeta) = m$, pa je ζ m-primaran ideal. Neka je $p(t) \in \zeta$ proizvoljno. $p(t) = 4a(t) + tb(t)$, pa $p(t) \in m$. Dakle $\zeta \subseteq m$. Neka je sada $r(t) \in m^2$ proizvoljno . $r(t) = 4a(t) + tb(t)$, pa je $r(t) \in \zeta$. Znači, $m^2 \subset \zeta \subset m$ tj. ζ nije potencija ideala.

3. Neka je $A = k[x,y,z]$ prsten polinoma nad poljem k , $\xi_1 = (x,y)$, $\xi_2 = (x,z)$, a $m = (x,y,z)$. Dokazati:

a) ξ_1 i ξ_2 su prosti, a m je maksimalan ideal prstena A

b) Ako je $\alpha = \xi_1\xi_2$, tada je $\alpha = \xi_1 \cap \xi_2 \cap m^2$ reducirana primarna kompozicija ideala α . Koje komponente su uložene , a koje izolovane?

Rješenje:

a) Definišimo preslikavanje $f : A/\xi_1 \to k[z]$ sa $f(p(z) + \xi_1) = p(z)$. f je izomorfizam (jednostavno se provjerava), a kako je $k[z]$ oblast cijelih, oblast cijelih je i A/ξ_1. Dakle, ξ_1 je prost ideal. Na sličan način zaključujemo da je i ξ_2 prost ideal. Kako je $A/m \cong k$, a k je polje, to je ideal m maksimalan.

Neka je $\alpha = \xi_1\xi_2$. Kako je potencija maksimalnog ideala primaran ideal, to je m^2 primaran ideal. Već smo pokazali da su ideali ξ_1 i ξ_2 prosti, pa su i primarni. Očigledno je $\alpha = \xi_1 \cap \xi_2 \cap m^2$. Ostaje još da pokažemo da je $r(\xi_1) \neq r(\xi_2), r(\xi_1) \neq r(m^2), r(m^2) \neq r(\xi_2)$ i da $\xi_1 \not\supseteq m^2 \cap \xi_2$, $m^2 \not\supseteq \xi_1 \cap \xi_2$, $\xi_2 \not\supseteq \xi_1 \cap m^2$. Ovo je jasno jer, $x+z \in r(\xi_1) \setminus r(\xi_2)$, $z^2 \in r(m^2) \setminus r(\xi_1)$, $y^2 \in r(m^2) \setminus r(\xi_2)$. Dalje, $x \in (\xi_1 \cap \xi_2) \setminus m^2$, $z^2 \in (m^2 \cap \xi_2) \setminus \xi_1$ i $y^2 \in (m^2 \cap \xi_1) \setminus \xi_2$. Dakle, $\alpha = \xi_1 \cap \xi_2 \cap m^2$ je reducirana primarna dekompozicija ideala α. m^2 je umetnuti, a ξ_1 i ξ_2 izolovani primarni ideali.

4. Neka je A prsten, a $A[x]$ prsten polinoma nad A. Za ideal α prstena A neka $\alpha[x]$ označava skup polinoma iz $A[x]$ sa koeficijentima iz α. Dokazati:

a) $\alpha[x]$ je ekstenzija ideala α u odnosu na ulaganje: $A \to A[x]$;

b) Ako je γ prost ideal u A, tada je $\gamma[x]$ prost ideal u $A[x]$;

c) Ako je ζ γ-primaran ideal u A, tada je $\zeta[x]$ $\gamma[x]$-primaran ideal u $A[x]$;

d) Ako je $\alpha = \bigcap_{i=1}^{n} \gamma_i$ reducirana primarna dekompozicija ideala α, tada je $\alpha[x] = \bigcap_{i=1}^{n} \gamma_i[x]$ reducirana primarna dekompozicija ideala $\alpha[x]$;

e) Ako je ζ minimalan prost ideal ideala α, tada je $\zeta[x]$ minimalan prosti ideal ideala $\alpha[x]$.

Rješenje:

a) Ideal $\alpha[x]$ je očigledno generisan polinomima $f(x)$ sa koeficijentima iz ideala α. Dakle, $\alpha[x]$ je ekstenzija ideala α u odnosu na ulaganje $A \to A[x]$.

b) Neka je γ prost ideal prstena A. Pokažimo najprije da je $(A/\gamma)[x] \cong A[x]/\gamma[x]$. Neka je $\phi : (A/\gamma)[x] \to A[x]/\gamma[x]$ definisano sa $\phi\left(\sum_{i=0}^{n}(a_i+\gamma)x^i\right) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i + \gamma[x]$. ϕ je homomorfizam jer,

$$\phi\left(m\sum_{i=0}^{n}(a_i+\gamma)x^i + n\sum_{i=0}^{n}(b_i+\gamma)x^i\right) = \phi\left(\sum_{i=0}^{n}((ma_i+nb_i)+\gamma)x^i\right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n}(ma_i+nb_i)x^i + \gamma[x] = m\phi\left(\sum_{i=0}^{n}(a_i+\gamma)x^i\right) + n\phi\left(\sum_{i=0}^{n}(b_i+\gamma)x^i\right)$$

Pokažimo da je ϕ injektivno. Neka je $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i + \gamma[x] = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i + \gamma[x]$. To znači da je $\sum_{i=0}^{n}(a_i-b_i)x^i \in \gamma[x]$, tj $a_i - b_i \in \gamma$ $(i = 0,1,\dots,n)$, pa je i $a_i + \gamma = b_i + \gamma$ $(i = 0,1,\dots,n)$. Sirjektivnost je očigledna , pa je ϕ izomorfizam. Prsten $(A/\gamma)[x]$ je inegralni domen, jer je A/γ integralni domen, pa je integralni domen i $A[x]/\gamma[x]$ što znači da je $\gamma[x]$ prost ideal prstena $A[x]$.

c) Neka je ζ γ-primaran ideal u A, tj. neka je $\gamma = r(\zeta)$ i ζ je primaran ideal. To znači da je $A/\zeta \neq 0$ i svaki djelitelj nule prstena A/ζ je nilpotentan. Prema zadatku 2 iz prve glave, slijedi da je i svaki djelitelj prstena $(A/\zeta)[x]$ takodje nilpotentan, pa zbog $(A/\gamma)[x] \cong A[x]/\gamma[x]$ to isto vrijedi i za prsten $A[x]/\zeta[x]$. Dakle, $\zeta[x]$ je primaran ideal prstena $A[x]$. Kako je , osim toga i $\gamma[x] = r(\zeta[x])$ to je $\zeta[x]$ $\gamma[x]$-primaran ideal.

d) Ako je $\alpha = \bigcap_{i=1}^{n} \gamma_i$ reducirana primarna dekompozicija ideala α, tada na osnovu dokazanog u a), b) i c) zaključujemo da je i $\alpha[x] = \bigcap_{i=1}^{n} \gamma_i[x]$ reducirana primarna dekompozicija ideala $\alpha[x]$.

e) Svaki ideal prstena A je kontrakcija nekog prostog ideala prstena $A[x]$, a odavde i iz a) i b) slijedi da ako je ζ minimalan prost ideal ideala α, onda je on minimalan element u skupu prostih ideala koji sadrže ideal α, pa isto važi i za ideal $\zeta[x]$. Znači $\zeta[x]$ minimalan prosti ideal ideala $\alpha[x]$.

5. Neka je k polje a $k[x_1,...,x_n]$ prsten polinoma. Dokazati da je svaki od ideala $\gamma_i = (x_1,...,x_i)$ $(1 \le i \le n)$ prstena $k[x_1,...,x_n]$ prost, a svaki γ_i- primaran ideal potencija ideala γ_i.

Rješenje:
Posmatrajmo najprije prsten $k[x_1]$. Prsten $k[x_1]$ je Euklidov prsten, a x_1 prost element tog prstena, pa je (x_1) prost ideal prstena $k[x_1]$. Neka je α (x_1)-primaran ideal. Tada je $r(\alpha) = (x_1)$, tj. $(x_1) = \{p \in k[x] : \exists n \in N, p^n \in \alpha\}$. Dakle, $\alpha = (x_1^{\,n}) = (x_1)^n$, za neko $n \in N$.
Posmatrajmo sada prsten $k[x_1, x_2]$. Ideal (x_1) je prost ideal prstena $k[x_1]$, pa je prema prethodnom zadatku (x_1, x_2) prost ideal prstena $k[x_1, x_2]$, a (x_1, x_2)-primaran ideal prema prethodnom zadatki i gore rečenom, potencija ideala (x_1, x_2). Nastavljajući ovako dalje zaključili bi da je svaki $(x_1,...,x_i)$- primaran ideal potencija ideala $(x_1,...,x_i)$.

6. Neka je $D(A)$ skup svih prostih ideala γ prstena A sa osobinom: postoji $a \in A$ takvo da je γ minimalani element u skupu prostih ideala prstena A koji sadrže $(0:a)$. Dokazati:

a) $a \in A$ je djelitelj nule $\Leftrightarrow$ $(\exists \gamma \in D(A))$ $a \in \gamma$;

b) Ako je ideal 0 dekompozibilan, tada je $D(A)$ skup asociranih ideala ideala 0.

Rješenje:

a) Neka je $a \in A$ djelitelj nule. To znači da postoji $b \in A$, $b \neq 0$ i takvo da je $ab = 0$. Tada je $a \in (0:b) = \{x \in A : xb = 0\}$, pa postoji prost ideal $\gamma \in D(A)$ za koji je $a \in \gamma$. Pretpostavomo sada da je $a \in \gamma$ i $\gamma \in D(A)$. Tada postoji $b \in A$, $b \neq 0$ takvo da je γ minimalan prost ideal koji sadrži $(0:b)$. Dakle, $a \in (0:b)$ što znači da je $ab = 0$. Dakle, a je djelitelj nule prstena A.

b) Pretpostavimo sada da je 0 dekompozibilan ideal prstena A i da je $0 = \bigcap_{i=1}^{n} \mu_i$ normalna primarna dekompozicija. Ideali $\zeta_i = r(\mu_i)$ su upravo oni prosti ideali koji se pojavljuju među idealima oblika $r(0:x)$ $(x \in A)$. Sa druge strane, $r(0:x)$ je jednak presjeku svih prostih ideala prstena A koji sadrže $(0:x)$, pa je $r(0:x)$ minimalan prost ideal prstena A koji sadrži $(0:x)$. Dakle, $r(0:x) \in D(A)$, pa je $D(A)$ skup svih ideala asociranih sa idealom 0.

7. Neka je γ prosti ideal prstena A, a $S_\gamma(0) = Ker(A \to A_\gamma)$. Dokazati:

a) $S_\gamma(0) \subseteq \gamma$;

b) $r(S_\gamma(0)) = \gamma \iff \gamma$ je minimalni prosti ideal prstena A;

c) $\gamma \subseteq \gamma' \Rightarrow S_\gamma(0) \supseteq S_{\gamma'}(0)$;

d) Ako $\gamma \in D(A)$ tada je $S_\gamma(0) = 0$, pri čemu $D(A)$ ima značenje kao u zadatku 6.

Rješenje:

a) Neka je $x \in S_\gamma(0) = Ker\left(A \xrightarrow{f} A_\gamma\right)$. To znači da je $f(x) = 0$ (u A/γ) i $f(x) = \frac{x}{s}$ gdje je $s \in A \setminus \gamma$. Dakle, postoji $s' \in A \setminus \gamma$ takvo da je $xs' = 0 \in \gamma$, pa kako $s' \notin \gamma$, a γ je prost ideal zaključujemo da $x \in \gamma$. Ovo znači da je $S_\gamma(0) \subseteq \gamma$.

b) $r(S_\gamma(0))$ je presjek svih prostih ideala prstena A koji sadrže $S_\gamma(0)$, pa je tvrdnja jasna.

c) Pretpostavimo da je $\gamma \subseteq \gamma'$ i uzmimo $x \in S_{\gamma'}(0)$ proizvoljno.Odavde slijedi da je $f(x) = 0$, pa postoji $s \in A \setminus \gamma'$ takvo da je $xs = 0$. Zbog $s \in A \setminus \gamma'$ i pretpostavke da je $\gamma \subseteq \gamma'$ zaključujemo da $x \in A \setminus \gamma$, pa je $x \in Ker(A \to A_\gamma)$, tj. $x \in S_\gamma(0)$. Znači, $S_\gamma(0) \supseteq S_{\gamma'}(0)$.

d) Neka je $a \in A$ i $a \neq 0$. Tada postoji $\gamma \in D(A)$ takvo da je $(0:a) \subseteq \gamma$. Dakle, za svako $b \in A$ za koje je $ab = 0$, $b \in \gamma$ pa ne postoji $x \in A \setminus \gamma = S$ za koje je $ax = 0$. Ovo znači da $a \notin S_\gamma(0)$, pa $a \notin \bigcap_{\gamma \in D(A)} S_\gamma(0)$. Dakle, $\bigcap_{\gamma \in D(A)} S_\gamma(0) = 0$.

8. Neka je γ prost ideal prstena A, a $S_\gamma(0)$ ima značenje kao u prethodnom zadatku. Dokazati:

a) Ako je γ minimalni prosti ideal prstena A, tada je $S_\gamma(0)$ minimalni γ-primarni ideal;

b) Ako je $\alpha = \bigcap\limits_{\gamma \min} S_\gamma(0)$, tada je α sadržano u nilradikalu $N(A)$ prstena A;

Rješenje:

a) Ako je γ minimalan prost ideal prstena A onda je prema prethodnom zadatku $S_\gamma(0)$ γ-primaran ideal , jer je $r(S_\gamma(0)) = \gamma$, a osim toga, ako $yx \in S_\gamma(0)$ i $x \notin \gamma$ onda postoji $s \in A \setminus \gamma$ i takvo da je $xys = 0$. $xs \notin \gamma$ pa $y \in S_\gamma(0)$ što znači da je $S_\gamma(0)$ prost i primaran ideal. Neka je μ proizvoljan γ-primaran ideal. Tada je $S_\gamma(0) \subseteq \mu$. Naime, ako $x \in S_\gamma(0)$ onda postoji $y \in A \setminus \gamma$ takvo da je $xy = 0 \in \mu$, pa $x \in \mu$. Dakle, $S_\gamma(0)$ je minimalan γ-primaran ideal.

b) Pretpostavimo da je $\alpha = \bigcap\limits_{\gamma \min} S_\gamma(0)$. Neka je $N(A)$ nilardikal prstena A.
$N(A) = \bigcap \xi$, gdje je ξ prost ideal prstena A, pa je $N(A) = \bigcap \gamma$ gdje su γ minimalni prosti ideali prstena A. Zbog $S_\gamma(0) \subseteq \gamma$, na osnovu zadatka 7. a) je i $\alpha \subseteq N(A)$.

9. Neka je S multiplikativan sistem prstena A, a $S(\alpha)$ kontrakcija ideala $S^{-1}\alpha$ u A ($S(\alpha)$ se zove saturacija ideala α u odnosu na S). Dokazati:

a) $S(\alpha) \cap S(\beta) = S(\alpha \cap \beta)$;

b) $S(r(\alpha)) = r(S(\alpha))$;

c) $S(\alpha) = (1) \Leftrightarrow \alpha \cap S \neq \varnothing$;

d) $S_1(S_2(\alpha)) = (S_1 S_2)(\alpha)$;

e) Ako je ideal α dekompozibilan, tada je skup svih saturacija ideala α konačan.

Rješenje:

a) $x \in S(\alpha) \cap S(\beta) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(S^{-1}(\alpha)) \cap f^{-1}(S^{-1}(\beta)) \Leftrightarrow (\exists s_1, s_2, u_1, u_2 \in S)$ takvi da je $xs_1u_1 \in \alpha$ i $xs_2u_2 \in \beta \Leftrightarrow x(s_1s_2u_1u_2) \in \alpha \cap \beta \Leftrightarrow x \in S(\alpha \cap \beta)$.

b) $x \in S(r(\alpha)) \Leftrightarrow (\exists s \in S)\ xs \in r(\alpha) \Leftrightarrow (\exists n \in N)\ (xs)^n \in \alpha \Leftrightarrow x^n s^n \in \alpha \Leftrightarrow$
$x \in r(S(\alpha))$.

c) $S(\alpha) = (1) \Leftrightarrow (\exists s \in S)\ 1 \cdot s \in \alpha \Leftrightarrow \alpha \cap S \neq \varnothing$.

d) $S_1(S_2(\alpha)) = S_1(\{y \in A : (\exists s_2 \in S) s_2 y \in \alpha\}) = \{x \in A : (\exists s_1 \in S_1, s_2 \in S_2) s_2(s_1 x) \in \alpha\} =$
$= (S_1 S_2)(\alpha)$.

e) Neka je je $\alpha = \bigcap_{i=1}^{n} \mu_i$ reducirana primarna dekompozicija ideala α. Neka je $r(\mu_i) = \xi_i$ $(i = 1, 2, ..., n)$ i neka je numeracija izvršena tako da se sa S ne presjecaju ideali $\xi_1, ..., \xi_m$, a presjecaju $\xi_{m+1}, ..., \xi_n$. Na osnovu propozicije 4.9. vrijedi $S^{-1}\alpha = \bigcap_{i=1}^{m} S^{-1}\mu_i$, $S(\alpha) = \bigcap_{i=1}^{m} \mu_i$, što znači da je skup svih saturacija ideala α konačan.

10. Neka je α dekompozibilan ideal prstena A, a γ maksimalan element u skupu ideala $(\alpha : x)$ $(x \in A \setminus \alpha)$. Dokazati da je γ asociran prosti ideal ideala α.

Rješenje:
Dovoljno će biti da dokažemo da je γ prost ideal prstena A jer tada tvrdnja slijedi neposredno iz prve teoreme jedinstvenosti. $\gamma \neq A$ jer je γ maksimalan element u skupu ideala oblika $(\alpha : x)$ $(x \in A \setminus \alpha)$. Neka je $x' \in A \setminus \alpha$ takav da je $\gamma = (\alpha : x')$ i neka je $ab \in \gamma$ i pretpostavimo da $b \notin \gamma$. To znači da je $abx' \in \alpha$. Kako $b \notin \gamma$ to $b \in (\alpha : ax')$, a pošto je γ maksimalan element u skupu ideala oblika $(\alpha : x)$ $(x \in A \setminus \alpha)$ to onda $ax' \in \alpha$ tj. $a \in \gamma$, pa je γ prost ideal.

11. Neka je α dekompozibilan ideal prstena A, Σ izolovan skup asociranih prostih ideala, a μ_Σ presjek odgovarajućih primarnih komponenti ideala α. Neka je element $s \in A$ odabran tako da za svaki asocirani prosti ideal γ ideala α vrijedi $s \in \gamma \Leftrightarrow \gamma \notin \Sigma$. Stavimo $S = \{s^n : n \geq 0\}$. Dokazati da je $\mu_\Sigma = S(\alpha) = (\alpha : s^n)$ (za svako dovoljno veliko n).

Rješenje:

Pretpostavimo da je α dekompozibilan ideal i $\alpha = \bigcap_{i=1}^{n} \mu_i$ reducirana primarna dekompozicija ideala α. S je multiplikativni sistem prstena A, pa je prema propoziciji 4.9. $S(\alpha) = \bigcap_{r(\mu_i) \notin \Sigma} \mu_i = \mu_\Sigma$. Svaki prosti ideal prstena A_S je ekstenzija ideala iz A pa je $S(\alpha) \supseteq (\alpha : s^n)$ $(\forall n \in N)$. Međutim, za dovoljno veliko n, $s^n \in \mu$, gdje je μ γ-primaran ideal primarne dekompozicije ideala α, pa imamo i obrntu inkluziju $S(\alpha) \subseteq (\alpha : s^n)$. Dakle, $S(\alpha) = (\alpha : s^n) = \mu_\Sigma$.

12. Neka prsten A ima svojstvo: svaki ideal prstena A je dekompozibilan. Dokazati da to svojstvo ima i prsten razlomaka A_S.

Rješenje:

Neka je $S^{-1}\alpha$ proizvoljan ideal prstena A_S. $S^{-1}\alpha$ je ekstenzija ideala α prstena A, a α je po pretpostavci dekompozibilan.Sada na osnovu propozicije 4.9. zaključujemo da je i $S^{-1}\alpha$ dekompozibilan ideal. Dakle, svaki ideal prstena A_S je dekompozibilan.