PRSTENI I IDEALI

1. Neka je x nilpotentan element prstena A. Dokazati da je $1+x$ invertibilan element prstena A. Odatle zaključiti da je suma nilpotentnog i invertibilnog elementa invertibilan element.

Rješenje:

Neka je x nilpotentan element. To znači da postoji prirodan broj n takav da je $x^n = 0$. Neka je n najmanji prirodan broj sa ovom osobinom. Kako je

$$1 = 1 + (-1)^{n-1} x^n = (1+x)\left(1 - x + x^2 - \dots + (-1)^{n-1} x^{n-1}\right)$$

vidimo da je $\left(1 - x + x^2 - \dots + (-1)^{n-1} x^{n-1}\right) \in A$ inverzni element elementa $1+x$ tj. $1+x$ je jedinica prstena A.

Neka je sada $a \in A$ jedinica što zanči da postoji $a^{-1} \in A$ takvo da je $aa^{-1} = 1$. Posmatrajmo element $a+x$. Imamo da je

$$a^n = a^n + (-1)^{n-1} x^n = (a+x)\left(a^{n-1} - a^{n-2}x + \dots + (-1)^{n-1} x^{n-1}\right), \text{ tj.}$$

$$1 = (x+a)\left(a^{-n}\left(a^{n-1} - a^{n-2}x + \dots + (-1)^{n-1} x^{n-1}\right)\right).$$

Dakle, $a+x$ je jedinica prstena A, a kako je a bio proizvoljan invertibilan element iz A zaključujemo da je zbir jedinice i nilpotenta jedinica prstena.

2. Neka je A prsten, a $A[x]$ prsten polinoma sa koeficijentima iz A u promjenljivoj x. Neka je $f = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$. Dokazati sljedeća tvrđenja:

a) f je jedinica u $A[x]$ $\Leftrightarrow$ a_0 je jedinica u A, a $a_1, a_2, \dots a_n$ su nilpotentni.

b) f je nilpotentan $\Leftrightarrow$ $a_0, a_1, \dots, a_n$ su nilpotentni.

c) f je djelitelj nule $\Leftrightarrow$ postoji nenulti element iz $a \in A$ takav da je $af = 0$.

d) Polinom f zovemo primitivnim ako je $(a_0, a_1, \dots a_n) = 1$. Pokazati da je fg primitivan polinom ako i samo ako su f i g primitivni polinomi.

Rješenje:

a) Pretpostavimo da je f invertibilan element prstena $A[x]$ i neka je $g = b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m$ takav da je $fg = 1$. Iz $fg = 1$ neposredno slijedi da je a_0 jedinica prstena A. Takođe, iz $fg = 1$ slijedi i

$$a_nb_m = 0$$

$$a_nb_{m-1} + a_{n-1}b_m = 0 \,/\, \cdot a_n$$

$$a_n^2b_{m-1} + a_{n-1}a_nb_m = 0 \text{ tj. } a_n^2b_{m-1} = 0$$

Dalje iz $a_n b_{m-2} + a_{n-1} b_{m-1} + a_{n-2} b_m = 0 \big/ \cdot a_n{}^2$ dobijamo $a_n{}^3 b_{m-2} = 0$.
Nastavljajući ovako, dobili bi $a_n{}^{m-1} b_0 = 0$, što zbog $b_0 \neq 0$ znači da je $a_n{}^{m-1} = 0$. Dakle, a_n je nilpotentan element.
Pretpostavimo sada da je a_i nilpotentno za $k < i \leq n$, gdje je k prirodan broj manji od n.
Posmatrajmo sada koeficijent uz x^{m+k} tj. posmatrajmo $a_k b_m + a_{k+1} b_{m-1} + \ldots + a_n b_{m+k-n}$. Kako je skup svih nilpotentnih elemenata prstena A ideal prstena (označit ćemo ga sa $N(A)$), to je
$a_k b_m \in N(A)$. Iz $a_{k-1} b_m + a_k b_{m-1} + \ldots + a_n b_{m+k-1-n}$, zaključujemo da je i
$a_{k-1} b_m + a_k b_{m-1} \in N(A)$, a sada imamo da je
$a_k (a_k b_{m-1} + a_{k-1} b_m) = a_k{}^2 b_{m-1} + a_{k-1} a_k b_m \in N(A)$, što konačno, znači da je $a_k{}^2 b_{m-1} \in N(A)$.
Nastavljajući ovaj postupak dalje, iz $a_k b_0 + a_{k-1} b_1 + \ldots + a_n b_{n-k}$ zaključujemo da
$a_k{}^{m+1} b_0 \in N(A)$. Množenjem sa a_0, imajući u vidu da je $a_0 b_0 = 1$, dobijamo $a_k{}^{m+1} \in N(A)$, tj. da $a_k \in N(A)$.
Kako je k bio proizvoljan prirodan broj manji od n, zaključujemo da su $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1$ nilpotentni elementi prstena A.
Obrnuto, pretpostavimo li da su $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1$ nilpotentni, a a_0 invertibilno, tada iz činjenice da je $a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$ nilpotentan element prstena $A[x]$ i zadatka **1** zaključujemo da je f invertibilno.

b) Pretpostavimo da je $f \in A[x]$ nilpotentan . To znači da je a_0 nilpotentan element prstena A, pa je prema zadatku **1**, $1 + a_0$ invertibilan element u A. Iz upravo dokazane tvrdnje pod a) (ako umjesto polinoma f uzmemo polinom $f + 1$) zaključujemo da su $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1$ nilpotentni. Dakle, $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ su nilpotentni elementi prstena A.
Obrnuto. Pretpostavimo da su $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ nilpotentni elementi prstena A. Kako je za svaki nilpotent $a \in A$ i svako $n \in N$ $ax^n \in A[x]$ nilpotentan element ,a zbir nilpotentnih elemenata je opet nilpotentan element, zaključujemo da je i polinom f nilpotentan.

c) Neka je f netrivijalan djelitelj nule prstena $A[x]$ i neka je $g = b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m \in A[x]$ polinom najnižeg stepena za koji je $fg = 0$. Jasno, $b_m \neq 0$. Iz $fg = 0$ slijedi da je $a_n b_m = 0$.
$a_n g = 0$, jer bi u suprotnom postojao polinom $h = a_n g$ stepena manjeg od m ($\deg(a_n g) < m$) i takav da je $fh = 0$ što nije moguće. Pretpostavimo da je $a_i g = 0$ za sve $i = n, \ldots k-1$. Ako bi bilo $a_k g \neq 0$, onda bi vrijedilo $f a_k g = 0$ i $\deg(a_k g) < m$, što je nemoguće. Dakle $a_i g = 0$ za $i = 0, \ldots n$. Kako je $b_m \neq 0$, a iz $a_i g = 0$ slijedi da je $a_i b_m = 0$ za $i = 0, \ldots n$, to je $b_m f = 0$.
Očigledno: ako postoji nenulti element $a \in A$ za koji je $af = 0$ onda je f djelitelj nule prstena $A[x]$ (a je nenulti element i u $A[x]$).

d) Neka su $f = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ i $g = b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m$ primitivni polinomi i neka je $fg = c_0 + c_1 x + \ldots + c_{m+n} x^{m+n}$, gdje je $c_k = \sum_{k=i+j} a_i b_j$, $k = 0, 1, \ldots, m+n$.

Pretpostavimo da proizvod fg nije primitivan polinom, tj. da postoji cijeli broj $d \neq 1$ takav da $d \mid c_k$ za sve $k = 0,1,\ldots,m+n$. Pošto su f i g primitivni polinomi postoje $i \in \{0,1,\ldots,n\}$ i $j \in \{0,1,\ldots,m\}$ takvi da $d \mid a_k$ $(\forall k = 0,1,\ldots,i-1)$, $d \nmid a_i$ i $d \mid b_k$ $(\forall k = 0,1,\ldots,j-1)$, $d \nmid b_j$. Po pretpostavci je element c_{i+j} djeljiv sa d. Međutim, $c_{i+j} = \sum_{k<i} a_k b_{i+j-k} + \sum_{k>i} a_k b_{i+j-k} + a_i b_j$.
Svaki sabirak prve sume je djeljiv sa d, jer je $k < i$, a i svaki sabirak druge sume, jer je $i + j - k < j$. Treći sabirak nije djeljiv sa d, pa nije ni c_{i+j} što je kontradikcija sa našom pretpostavkom. Dakle, polinom fg je primitivan.
Obrnuto, pretpostavimo da je polinom fg primitivan, a da jedan od polinoma npr. f nije. To bi značilo da postoji cijeli broj $d \neq 1$ i takav da $d \mid a_k$ $(\forall k = 0,1,\ldots,n)$, a tada bi postojao i polinom h takav da je $f = dh$. Ovo bi značilo da je $fg = dhg$ tj. da $d \mid c_k$ $k = 0,1,\ldots,m+n$ što je u kontradikciji sa pretpostavkom da je gf primitivan. Dakle, i polinomi f i g su primitivni.

3. Dokazati da je u prstenu $A[x]$ Jackobsonov radikal jednak nilradikalu.

Rješenje: Da je nilradikal sadržan u Jacobsonovom radikalu jasno je, jer je nilradikal presjek prostih, Jacobsonov radikal presjek maksimalnih ideala, a svaki maksimalan ideal je prost. Dakle, $N(A[x]) \subseteq J(A[x])$. Dokažimo i obrnutu inkluziju. Neka je $f \in J(A[x])$. Za svako $g \in A[x]$ polinom $1 - fg$ je invertibilan (propozicija 1.9.), pa je invertibilan i za $g = x$. Znači, polinom $1 - fx = 1 - a_0 x - a_1 x^2 - \ldots - a_n x^{n+1}$ je jedinica prstena $A[x]$, a prema prethodnom zadatku a) odatle slijedi da su $a_0, a_1, \ldots, a_n$ nilpotentni. Sada, opet na osnovu zadatka 2 b) imamo da je f nilpotentan, tj. da $f \in N(A[x])$. Dakle, $N(A[x]) = J(A[x])$.

4. Neka je $A[[x]]$ prsten formalnih redova potencija nad prstenom A, tj. skup svih elemenata oblika $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ $(a_n \in A)$ u kome se računa ovako:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \Leftrightarrow a_n = b_n \ (n = 0,1,\ldots)$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i + \sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) x^k$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \cdot \sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i+j=k} a_i b_j \right) x^k$$

Dokazati:

a) f je jedinica u $A[[x]]$ ako i samo ako je a_0 jedinica u A

b) f je nilpotentno ako i samo ako je a_n nilpotentno $(n = 0,1,\ldots)$

c) f je u Jacobsonovom radikalu prstena $A[[x]]$ ako i samo ako je a_0 u Jacobsonovom radikalu prstena A

d) Kontrakcija m^c maksimalnog ideala m prstena $A[[x]]$ je maksimalni ideal prstena A, a ideal m je generisan sa m^c i x.

e) Svaki prosti ideal prstena A je kontrakcija nekog prostog ideala prstena $A[[x]]$.

Rješenje:

a) Pretpostavimo da je $f=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ invertibilan element prstena $A[[x]]$, tj. pretpostavimo da postoji $g=\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ takvo da je $fg=0$. Po definiciji množenja elemenata prstena $A[[x]]$ imamo da je $a_0 b_0 = 1$, što znači da je a_0 jedinica prstena A.

Obrnuto, pretpostavimo da je a_0 jedinica prstena A. Da bi f bio invertibilan u $A[[x]]$ mora postojati $g \in A[[x]]$ takvo da je $fg=1$. To bi značilo da koeficijenti $b_0, b_1, \ldots$ moraju zadovoljavati sistem jednačina

$$\begin{aligned}
&a_0 b_0 = 1\\
&a_0 b_1 + a_1 b_0 = 0\\
&a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 = 0\\
&\vdots\\
&a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0 = 0\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Dokažimo indukcijom da ovaj sistem ima rješenje po $b_0, b_1, \ldots$. Da je tvrđenje tačno za $n=0$ slijedi neposredni iz pretpostavke. Pretpostavimo da smo izračunali $b_0, b_1, \ldots, b_n$. Tada je $b_{n+1} = -a_0^{-1}(a_1 b_n + \ldots + a_{n+1} b_0)$, pa za f postoji inverzni element g, tj. f je jedinica prstena $A[[x]]$.

b) Pretpostavimo da je f nilpotentno. Odatle neposredno slijedi da je a_0 nilpotentno, pa je nilpotentno i $f-a_0$, što znači da je nilpotentno i a_1, itd... Pretpostavimo da su $a_0, a_1, \ldots, a_n$ nilpotentni. Tada je i $f-(a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n)$ nilpotentno, pa je nilpotentno i a_{n+1}. Po principu matematičke indukcije zaključujemo da je a_i nilpotentno $\forall i = 0,1,2,\ldots$

Obrnuto, neka su $a_0, a_1, \ldots$ nilpotentni.Tada su nilpotentni i elementi $a_0, a_1x, a_2x^2, \ldots$ pa je nilpotentna i njihova suma, tj. f je nilpotentno.

c) Pretpostavimo da je f u Jacobsonovom radikalu prstena $A[[x]]$. To znači da je $1-fg$ invertibilno za svako $g \in A[[x]]$, pa i za $g=1$. Prema dokazanom pod a) imamo da je $1-a_0b_0$ invertibilno, što opet prema propoziciji 1.9. znači da je a_0 u Jacobsonovom radikalu prstena A.

Obrnuto, ako je a_0 u Jacobsonovom radikalu prstena A onda je $1-a_0b_0$ invertibilno za svako $b_0 \in A$, pa je prema a) $1-fg$ invertibilno za svako $g \in A[[x]]$ tj. f je u Jacobsonovom radikalu prstena $A[[x]]$.

d) Neka je m maksimalan ideal prstena $A[[x]]$. Pokažimo najprije da je $x \in m$. Ako ovo ne bi bilo tačno onda bi imali da je $m+(x) \supset m$, a kako je m maksimalan ideal to je

$m+(x)=A[[x]]$. $0\in m$ pa postoji $g\in A[[x]]$ takvo da je $xg=1$. Ovo je nemoguće, pa prema tome, $x\in m$. Neka je sada $f=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\in m$ proizvoljno. Zbog $x\in m$ imamo da $a_0\in m$, a kako je $a_0=f^{-1}(a_0)$ to $a_0\in m^c$. Pretpostavimo da m^c nije maksimalan ideal, tj. pretpostavimo da postoji ideal $\alpha\subseteq A$ takav da je $\alpha\neq A$ i $m^c\subset\alpha$. Neka je $b\in\alpha\setminus m^c$. $f(b)\in A[[x]]\setminus m$, pa je $(f(b))+m=A[[x]]$ (jer je m maksimalan). Odavde zaključujemo da postoji $f\in A[[x]]$ takvo da je $bf=1$, što je nemoguće jer b nije invertibilno. Dakle, m^c je maksimalan ideal prstena A. Očigledno je m generisano sa m^c i x.

e) Neka je γ prost ideal prstena A. Posmatrajmo ideal $\bar{\gamma}$ prstena $A[[x]]$ generisan sa γ i x i pokažimo da je $\bar{\gamma}$ prost ideal. Neka je $fg\in\bar{\gamma}$. Odavde slijedi da $a_0b_0\in\gamma$, a γ je prost, pa je a_0 ili b_0 iz γ. Neka je $a_0\in\gamma$. Zbog $a_0,x\in\bar{\gamma}$ zaključujemo da $f\in\bar{\gamma}$, što znači da je $\bar{\gamma}$ prost ideal prstena $A[[x]]$. Jasno je da je $f^{-1}(\bar{\gamma})=\gamma$ tj. da je $\gamma=\gamma^c$, čime smo pokazali da je svaki prost ideal prstena A kontrakcija nekog prostog ideala prstena $A[[x]]$.

5. Neka je A prsten čiji svaki ideal koji nije sadržan u nilradikalu sadrži nenultu idempotentu (tj. element e sa osobinom $e^2=e\neq 0$). Dokazati da se nilradikal i Jacobsonov radikal prstena A podudaraju.

Rješenje:
Da je nilradikal sadržan u Jacobsonovom radikalu, jasno je jer je nilradikal presjek svih prostih ideala, Jacobsonov radikal presjek svih maksimalnih ideala, a svaki maksimalan ideal je prost. Dokažimo da vrijedi i obrnuto tj, da je Jacobsonov radikal $J(A)$, sadržan u nilradikalu $N(A)$. Ako ovo ne bi bilo tačno onda bi Jacobsonov radikal, po pretpostavci zadatka, sadržavao nenultu idempotentu e koja ne pripada nilradikalu. Ovo bi značilo da je $1-ex$ invertibilno $\forall x\in A$, pa i za $x=1$. Dakle, postoji $a\in A$ takvo da je

$$(*)\qquad a(1-e)=1.$$

Sa druge strane, zbog, $e^2=e$, imamo da je $e(1-e)=0$. Množenjem posljednje jednakosti sa a i imajuću u vidu $(*)$, dobijamo da je $e=0$ što je u kontradikciji sa pretpostavkom. Dakle, $J(A)\subseteq N(A)$. Iz svega rečenog, konačno zaključujemo da je $J(A)=N(A)$.

6. Neka je $A\neq\{0\}$ prsten . Dokazati:

a) Skup svih prostih ideala prstena A ima minimalni element u odnosu na relaciju inkluzije;

b) Za svaki ideal $\alpha\neq(1)$ prstena A postoji bar jedan minimalni prosti ideal β koji sadrži α.

Rješenje:

a) Pokažimo da je skup Σ, svih prostih ideala prstena A induktivno uređen relacijom $\supseteq$. Neka je $\{\alpha_i\}_{i\in I}$ lanac skupa Σ. Pokažimo da je i $\bigcap_{i\in I}\alpha_i$ prost ideal, tj. da pripada skupu Σ. Neka je $ab\in\bigcap_{i\in I}\alpha_i$ i neka $b\notin\bigcap_{i\in I}\alpha_i$. Ovo znači da postoji $k\in I$, takvo da $b\notin\alpha_k$, a kako je α_k prost ideal i $ab\in\alpha_k$ to onda $a\in\alpha_k$, pa $a\in\alpha_i$ za sve $i\le k$. Međutim, kako $b\notin\alpha_k$, to $b\notin\alpha_i\,(\forall i>k)$, a svaki od ideala α_i je prost i sadrži ab, što znači da $a\in\alpha_i$ i za sve $i>k$. Dakle, $a\in\bigcap_{i\in I}\alpha_i$, pa $\bigcap_{i\in I}\alpha_i\in\Sigma$. Po Zornovoj lemi postoji bar jedan minimalni element skupa Σ, tj. postoji bar jedan minimalni prosti ideal prstena A.

b) Posmatrajmo prsten $B=A/\alpha$. Prema prethodno dokazanom, pod a), postoji minimalni prosti ideal prstena B. Neka je to $\overline{\beta}$. Sada je $\beta=\{x\in A:\ f(x)\in\overline{\beta}\}$ minimalni prosti ideal prstena A koji sadrži α.

7. Neka je $\alpha\neq(1)$ ideal prstena A. Dokazati:

$$r(\alpha)=\alpha\Leftrightarrow\alpha \text{ je presjek prostih ideala.}$$

Rješenje:
Neka je α presjek prostih ideala prstena A. Jasno je da je $\alpha\subseteq r(\alpha)$. Pokažimo da je i $r(\alpha)\subseteq\alpha$. Neka je $x\in r(\alpha)$, tj. neka je $x^n\in\alpha$ za neki prirodan broj n. α je presjek prostih ideala, pa je prema tome x^n sadržano i u svakom prostom idealu, što znači da je i x sadržano u svakom pomenutom prostom idealu, pa i u njihovom presjeku. Dakle, $r(\alpha)\subseteq\alpha$, što konačno znači da je $r(\alpha)=\alpha$.
Obrnuto, pretpostavimo da je $r(\alpha)=\alpha$. $r(\alpha)/\alpha$ je nilradikal prstena A/α, tj, $r(\alpha)/\alpha$ je presjek svih prostih ideala prstena A/α, pa je i $r(\alpha)=\alpha$ presjek prostih ideala prstena A.

8. Neka je N nilradikal prstena A. Dokazati da su sljedeći uslovi međusobno ekvivalentni:
a) A ima tačno jedan prost ideal;
b) Svaki element iz A je invertibilan ili nilpotentan;
c) A/α je polje.

Rješenje:
$a)\Rightarrow b)$
Pretpostavimo da prsten A ima tačno jedan prost ideal α, a kako je svaki maksimalan ideal prost, ovo znači da prsten A ima i samo jedan maksimalan ideal α, pa je $J(A)=N(A)=\alpha$. Neka je $a\in A$ proizvoljno. Ako a nije invertibilno, onda je prema posljedici 1.5. sadržano u maksimalnom idealu $\alpha=N(A)$, što znači da je a nilpotentno.
$b)\Rightarrow c)$
Pretpostavimo da je svaki element prstena A ili invertibilan ili nilpotentan. Posmatrajmo prsten $A/N(A)$. Neka je $f:A\to A/N(A)$ i neka je $a+N(A)$ nenulti element prstena

$A/N(A)$.Pošto $a \notin N(A)$, a je invertibilno, pa postoji $b \in A$ takvo da je $ab=1$. Sada je i $f(a)f(b)=(a+N(A))(b+N(A))=1+N(A)$, što znači da je $a+N(A)$ invertibilno. Dakle, $A/N(A)$ je polje.

$c) \Rightarrow a)$

Pretpostavimo da je $A/N(A)$ je polje. Neka je α proizvoljan prost ideal prstena A. $N(A) \subseteq \alpha$ jer je $N(A)$ presjek prostih ideala . Ideal $f(\alpha)$ prstena $A/N(A)$ je je ili (0) ili (1) (f je prirodni epimorfizam). Ako je $f(\alpha)=(0)$ onda je $\alpha = N(A)$, a ako je $f(\alpha)=(1)$ onda je $\alpha = A$. Drugi slučaj je nemoguć, pa je prema tome $\alpha = N(A)$. Kako je α bio proizvoljan prost ideal prstena A zaključujemo da je $\alpha = N(A)$ i jedini prost ideal prstena A.

9. Prsten A zove se Boolov prsten, ako vrijedi $x^2 = x(\forall x \in A)$. Dokazati da u Boolovom prstenu vrijedi :

a) $2x=0$

b) Svaki prosti ideal γ prstena A je maksimalan, a A/γ je polje sa dva elementa

c) Svaki ideal generisan konačnim skupom je glavni.

Rješenje:

a) $(x+x)^2 = x+x$, a sa druge strane imamo da je

$(x+x)^2 = x^2+x^2+x^2+x^2 = x+x+x+x$.

Znači, $x+x+x+x=x+x$, tj. $2x=0$.

b) Neka je γ prost ideal prstena A. Pokažimo da je γ maksimalan. A/γ je oblast cijelih. Neka je $f: A \to A/\gamma$ prirodni epimorfizam i $x \in A$ proizvoljno ali takvo da je $f(x) \neq 0$. I u prstenu A/γ takođe važi $(f(x))^2 = f(x)$, pa je $f(x)(f(x)-\overline{1})=\overline{0}$. Kako je $f(x)\neq 0$ i A/γ oblast cijelih, to mora biti $f(x)=\overline{1}$. Znači, A/γ je polje, pa je γ maksimalan ideal prstena A. Jasno je da polje A/γ ima samo dva elementa, klase $\overline{1}$ i $\overline{0}$.

c) Pretpostavimo da je α konačno generisan ideal prstena A. Neka je , najprije, ideal α generisan sa dva elementa tj, neka je $\alpha = (a_1, a_2)$. Posmatrajmo proizvod $(a_1+1)(a_2+1) = a_1a_2+a_1+a_2+1$. Ako stavimo $b = a_1a_2+a_1+a_2+1$ onda je $b \in \alpha$, pa je i $(b) \subseteq \alpha$. Za $a_i\,(i=1,2)$ vrijedi $a_i(b+1) = a_i(a_1a_2+a_1+a_2+1)=0$ (jer je $a_i^{\,2} = a_i$ i $2a_i = 0$, $i=1,2$) . Neka je $x \in \alpha$ proizvoljno. Tada je $x = x_1a_1+x_2a_2$ gdje $x_1, x_2 \in A$. Sada imamo $x = x_1a_1+x_2a_2+x_1a_1(1+b)+x_2a_2(1+b) = (x_1a_1+x_2a_2)b$, što znači da je $x \in (b)$. Zbog proizvoljnosti x zaključujemo da je $\alpha = (b)$, tj. da je α glavni ideal.

Ako sad pretpostavimo da je $\alpha = (a_1, a_2, ..., a_n)$ i stavimo $1+b = (1+a_1)(1+a_2)...(1+a_n)$, onda bi razmišljajući na isti način kao u prethodnom slučaju zaključili da je $\alpha = (b)$, tj da je α glavni ideal.

10. Dokazati da lokalni prsten ne sadrži drugih idempotenti osim 0 i 1.

Rješenje:
Neka je e idempotenta prstena A. Iz $e^2 = e$ imamo da je $e(e-1)=0$. Prsten A je po pretpostavci, lokalni pa ima samo jedan maksimalan ideal m koji je, naravno, prost i sadrži 0. Znači $e(e-1) \in m$ pa imamo da ili $e \in m$ ili $e-1 \in m$ (oboje ne vrijedi istovremeno jer bi tada imali da je $m=(1)$). Iz ovoga zaključujemo da je ili e ili $e-1$ invertibilno. U prvom bi slučaju imali da je $e=1$, a u drugom $e=0$. Dakle, prsten A nema drugih nilpotentnih elemenata osim 0 i 1.

11. Neka je A prsten u kome svaki element x ispunjava uslov $x^n = 1$ za neko $n > 1$ (koje zavisi od x). Dokazati da je svaki prosti ideal prstena A maksimalan.

Rješenje:
Neka je γ prost ideal prstena A. A/γ je domen integriteta. Neka je $f: A \to A/\gamma$ prirodni epimorfizam. Po pretpostavci za svako $x \in A$ postoji prirodan broj n takav da je $x^n = 1$, a to znači da i za svako $f(x) \in A/\gamma,\ f(x) \neq 0$ postoji prirodan broj n takav da je $f(x^n) = \left(f(x)\right)^n = \overline{1}$. Ovo zapravo, znači da je svaki nenulti element prstena A/γ invertibilan. Dakle, prsten A/γ je polje a ideal γ je maksimalan.

12. Neka je Σ skup svih ideala prstena A u kojima je svaki element djelitelj nule. Dokazati da Σ ima maksimalni element i da je svaki maksimalni element iz Σ prost ideal. Prema tome, skup djelitelja nule prstena A je unija prostih ideala.

Rješenje:
Skup Σ je induktivno uređen relacijom inkluzije. Naime, ako je $\{\alpha_i\}_{i\in I}$ lanac ideala prstena A, tada je $\alpha = \bigcup_{i\in I} \alpha_i$ ideal iz Σ, jer je svaki element iz α djelitelj nule. Prema Zornovoj lemi skup Σ ima maksimalni element. Pokažimo da je svaki element iz Σ prost ideal. Neka je $\alpha \in \Sigma$ i neka $ab \in \alpha$. Odavde slijedi da postoji $x \neq 0$ i takav da je $(ab)x = 0$. No, tada je i $a(bx) = 0$, pa ako je $bx \neq 0$ onda $a \in \alpha$, a ako je $bx = 0$ onda $b \in \alpha$. Dakle, α je prost ideal prstena A.