PRSTENI I MODULI RAZLOMAKA

1. Neka je M konačno generisan A-modul, a S multiplikativni sistem prstena A. Dokazati:
$$S^{-1}M=0 \Leftrightarrow (\exists s\in S)\, sM=0.$$

Rješenje:
Pretpostavimo da je $S^{-1}M=0$. Tada je $Ann\left(S^{-1}M\right)=\left\{x\in S^{-1}A : xS^{-1}m=0\right\}=S^{-1}A$. Na osnovu propozicije 3.14. je $Ann\left(S^{-1}M\right)=S^{-1}\left(Ann\left(M\right)\right)=S^{-1}A$.
$S^{-1}\left(Ann\left(M\right)\right)=\left\{\frac{m}{s}: s\in S, m\in A, mM=0\right\}=\left\{\frac{a}{s}: a\in A, s\in S\right\}$ pa postoji $s\in S$ takvo da je $sM=0$.
Obrnuto, pretpostavimo da postoji $s\in S$ takvo da je $sM=0$. Tada je i $\frac{a}{t}M=\frac{as}{ts}M=0$ za sve $\frac{a}{t}\in S^{-1}A$. To zanči da je $Ann\left(S^{-1}M\right)=S^{-1}A$ tj. $S^{-1}M=0$.

2. Neka je α ideal prstena A, a $S=1+\alpha$. Dokazati da je ideal $S^{-1}\alpha$ sadržan u Jacobsonovom radikalu prstena A_S.

Rješenje:
Neka je $x=\frac{a_1}{1+a_2}\in S^1\alpha$ proizvoljan element ideala $S^{-1}\alpha$ i $y=\frac{b}{1+a_3}\in A_S$ takođe proizvoljno.
Posmatrajmo sad element $\overline{1}+yx$. Imamo da je
$\overline{1}+yx=\frac{1+a_4}{1+a_4}+\frac{b}{1+a_3}\cdot\frac{a_1}{1+a_2}=\frac{1+a_4}{1+a_4}+\frac{ba_1}{1+a_2+a_3+a_3a_2}=\frac{1+a_4}{1+a_4}+\frac{a_5}{1+a_6}$, gdje smo stavili da je $a_5=ba_1\in\alpha$ i $a_2+a_3+a_3a_2=a_6\in\alpha$. Dalje je
$\overline{1}+yx=\frac{1+a_4}{1+a_4}+\frac{a_5}{1+a_6}=\frac{1+a_4+a_4a_6+a_6+a_5+a_4a_5}{1+a_4+a_6+a_4a_6}=\frac{1+a_7}{1+a_8}$, gdje je
$a_7=a_4+a_4a_6+a_6+a_5+a_4a_5\in\alpha$ i $a_8=a_4+a_6+a_4a_6\in\alpha$. Odavde se vidi da je element $\overline{1}+xy$ invertibilan u prstenu A_s i to za svako $y\in A_s$, što znači da je $x\in J\left(A_s\right)$. Kako je x bio proizvoljan element ideala $S^{-1}\alpha$ to konačno, zaključujemo da je $S^{-1}\alpha\in J\left(A_S\right)$.

3. Dokazati posljedicu koja glasi: "Neka je M konačno generisani A- modul, a α ideal prstena A sa $M=\alpha M$. Tada u prstenu A postoji element $a\equiv 1(\operatorname{mod}\alpha)$ sa $aM=0$" na osnovu prethodna dva zadatka i Nakayamine leme ne koristeći determinantu.

Rješenje:
Stavimo da je $S = 1 + \alpha$. S je multiplikativni sistem, a prema zadatku 2. $S^{-1}\alpha$ je sadržano u Jacobsonovom radikalu prstena A_s. Odavde i iz $S^{-1}M = \left(S^{-1}\alpha\right)\left(S^{-1}M\right)$ na osnovu Nakayamine leme zaključujemo da je $S^{-1}M = 0$. Modul M je po pretpostavci konačno generisan, pa iz prvog radatka zaključujemo da postoji $s \in S$ za koje je $sM = 0$.

4. Dokazati da za element $s \in A$ koji nije nilpotentan postoji prosti ideal γ prstena A koji ne sadrži s.

Rješenje:
Stavimo da je $S = \left\{s^n : n \in N\right\}$. Kako s nije nilpotentan to je $s^n \neq 0$ $\left(\forall n \in N\right)$, što znači da $0 \notin S$ pa je $A_S \neq 0$. Prsten A_S ima bar jedan maksimalan ideal. Neka je to m. Posmatrajmo kontrakciju ideala m u odnosu na prirodni epimorfizam $f : A \to A_S$. Neka je $\alpha = f^{-1}\left(m\right)$. Kako je m maksimalan to je on i prost ideal pa je i α prost ideal prstena A. Pokažimo još da $s \notin \alpha$. Pretpostavimo suprotno, tj, da je $s \in \alpha$. To bi značilo da je $\frac{s}{1} \in m$, pa $\frac{1}{s} \cdot \frac{s}{1} = 1 \in m$ što je u kontradikciji sa pretpostavkom da je m maksimalan ideal prstena A_S.

5. Neka su S i T multiplikativni sistemi prstena A, a U slika sistema T u odnosu na prirodni homomorfizam $f : A \to A_S$. Dokazati da su prsteni $\left(ST\right)^{-1} A = U^{-1}\left(S^{-1}A\right)$ izomorfni.

Rješenje:
Definišimo preslikavanje $g : \left(ST\right)^{-1} A \to U^{-1}\left(S^{-1}A\right)$ sa: $g\left(\frac{a}{st}\right) = \frac{a/s}{t/1}$ i pokažimo da je g izomorfizam prstena. Najprije,

$$g\left(\frac{a_1}{s_1t_1} + \frac{a_2}{s_2t_2}\right) = g\left(\frac{a_1s_2t_2 + a_2s_1t_1}{s_1s_2t_1t_2}\right) = \frac{a_1t_2/s_1 + a_2t_1/s_2}{t_1t_2/1} = \frac{a_1/s_1}{t_1/1} + \frac{a_2/s_2}{t_2/1} = g\left(\frac{a_1}{s_1t_1}\right) + g\left(\frac{a_2}{s_2t_2}\right) \text{ i}$$

$$g\left(\frac{a_1}{s_1t_1} \cdot \frac{a_2}{s_2t_2}\right) = \frac{a_1a_2/s_1s_2}{t_1t_2/1} = \frac{a_1/s_1}{t_1/1} \cdot \frac{a_2/s_2}{t_2/1} = g\left(\frac{a_1}{s_1t_1}\right) g\left(\frac{a_2}{s_2t_2}\right),$$ što znači da je g homomorfizam prstena. Pokažimo da je g bijektivno preslikavanje.

Injektivnost: Neka je $g\left(\frac{a_1}{s_1t_1}\right) = g\left(\frac{a_2}{s_2t_2}\right)$, tj. neka je $\frac{a_1/s_1}{t_1/1} = \frac{a_2/s_2}{t_2/1}$. Odavdje siljedi da postoji $t/1 \in U$ takvo da vrijedi $\left(\frac{a_1}{s_1} \cdot \frac{t_1}{1} - \frac{a_2}{s_2} \cdot \frac{t_2}{1}\right) \cdot \frac{t}{1} = 0$ pa je $\frac{a_1t_2s_2 - a_2t_1s_1}{s_1s_2} \cdot \frac{t}{1} = 0$. Iz posljednje jednakosti zaključujemo da postoji $s \in S$ takvo da je $\left(a_1t_2s_2 - a_2t_1s_1\right)ts = 0$, što znači da je $\frac{a_1}{t_1s_1} = \frac{a_2}{t_2s_2}$.

Sirjektivnost: Neka je $\frac{a/s}{t/1}$ proizvoljan element iz $U^{-1}\left(S^{-1}A\right)$. Tada je $g\left(\frac{a}{st}\right)=\frac{a/s}{t/1}$, pa je g sirjektivno.

Dakle, prsteni $(ST)^{-1}A$ i $U^{-1}\left(S^{-1}A\right)$ su izomorfni.

6. Neka je $f: A \to B$ homomorfizam prstena, S multiplikativni sistem prstena A, a $T=f(S)$. Dokazati da su A_S -moduli $S^{-1}B$ i $T^{-1}B$ izomorfni.

Rješenje:

Definišemo li u skupu $S^{-1}B$ operacije sabiranja i množenja elementima iz A_S sa :

$$\frac{b_1}{s_1}+\frac{b_2}{s_2}=\frac{b_1 f(s_2)+b_2 f(s_1)}{s_1 s_2}$$

i $\frac{b}{s}\cdot\frac{a}{\overline{s}}=\frac{bf(a)}{s\overline{s}}$, onda je jednostavno provjeriti da sa ovako definisanim operacijama $S^{-1}B$ postaje A_S modul.

Ako u prstenu $T^{-1}B$ definišemo množenje elementima iz A_S na slijedeći način:

$$\frac{a}{s}*\frac{b}{t}=\frac{a}{s}*\frac{b}{f(\overline{s})}=\frac{f(a)b}{f\left(s\overline{s}\right)},$$

onda i $T^{-1}B$ postaje A_S - modul.

Definišimo preslikavanje $g: S^{-1}B \to T^{-1}B$ stavljajući da je $g\left(\frac{b}{s}\right)=\frac{b}{f(s)}$, i pokažimo da to izomorfizam modula.

Najprije, vrijedi $g\left(\frac{b_1}{s_1}+\frac{b_2}{s_2}\right)=\frac{b_1 f(s_2)+b_2 f(s_1)}{f(s_1 s_2)}=\frac{b_1}{f(s_1)}+\frac{b_2}{f(s_2)}=g\left(\frac{b_1}{s_1}\right)+g\left(\frac{b_2}{s_2}\right)$

i $g\left(\frac{a}{s}\cdot\frac{b}{\overline{s}}\right)=g\left(\frac{f(a)b}{s\overline{s}}\right)=\frac{f(a)b}{f\left(s\overline{s}\right)}=\frac{a}{s}*g\left(\frac{b}{\overline{s}}\right)$,

što znači da je g homomorfizam modula.

Dalje, neka je $g\left(\frac{b_1}{s_1}\right)=g\left(\frac{b_2}{s_2}\right)$ tj, neka je $\frac{b_1}{f(s_1)}=\frac{b_2}{f(s_2)}$. Ovo znači da postoji $t \in T$ takvo da je $\left(b_1 f(s_2)-b_2 f(s_1)\right)t=0$. Kako $t \in T$ to postoji $s \in S$ takvo da je $t=f(s)$. Sada je $\left(b_1 f(s_2)-b_2 f(s_1)\right)f(s)=0$, odakle slijedi da je $\frac{b_1}{s_1}=\frac{b_2}{s_2}$. Dakle, g je injektivno.

Neka je $\frac{b}{t}\in T^{-1}B$ proizvoljno. Tada postoji $s \in S$ takvo da je $f(s)=t$, pa je $g\left(\frac{b}{s}\right)=\frac{b}{f(s)}=\frac{b}{t}$, što znači da je g i sirjektivno.

Konačno, iz svega rečenog zaključujemo da su A_S -moduli $S^{-1}B$ i $T^{-1}B$ izomorfni.

7. a) Ako za svaki prosti ideal γ prstena A, lokalni prsten A_γ nema nilpotentnih elemenata različitih od 0, dokazati da ni prsten A nema nilpotentnih elemenata različitih od 0.

b) Ako je, za svaki prosti prosti ideal γ prstena A, lokalni prsten A_γ oblast cijelih, da li je tada i A oblast cijelih?

Rješenje:

a) Neka je γ proizvoljan prost ideal prstena A, a $N(A)$ nilradikal prstena A. $N(A_\gamma)$ je nilradikal prstena A_γ, a kako po pretpostavci A_γ nema nilpotentnih elemenata različitih od nule, to je $N(A_\gamma)=0$. Sada na osnovu propozicije 3.8. (s obzirom da nilradikal možemo posmatrati i kao modul nad prstenom A), zaključujemo da je $N(A)=0$, tj. da prsten A nema nilpotentnih elemenata različitih od nule.

b) Ako je za svaki prosti ideal γ prstena A lokalni prsten A_γ oblast cijelih tada prsten A ne mora bti oblast cijelih. Naime, posmatrajmo prsten Z_6. Prsten Z_6 ima samo dva prosta ideala (2) i (3), prsteni $Z_{6(2)}$ i $Z_{6(3)}$ su oblasti cijelih ,dok Z_6 nije oblast cijelih.

8. Neka je Σ skup svih multiplikativnih sistema prstena A koji se ne presijecaju sa zadanim idealom α prstena A. Dokazati da skup Σ sadrži maksimalni element i da je S maksimalni element skupa Σ, ako i samo ako je $A\setminus S$ minimalni prosti ideal prstena A u kome je sadržan ideal α.

Rješenje:

Pokažimo da je skup Σ induktivno uređen relacijom inkluzije. Neka je $(S_i)_{i\in I}$ lanac elemenata iz Σ. Stavimo da je $\overline{S}=\bigcup_{i\in I} S_i$. $\overline{S}$ je multiplikativni sistem, jer ako $a,b\in\overline{S}$ onda postoje $i,j\in I$ takvi da $a\in S_i$ i $b\in S_j$. Bez ograničenja opštosti možemo pretpostaviti da je $i<j$. Kako je zbog $i<j$, $S_i\subseteq S_j$, to je i $a\in S_j$, a pošto je S_j multiplikativni sistem, to $ab\in S_j$, pa $ab\in\overline{S}$. Jasno, jedinica prstena A pripada skupu $\overline{S}$ pa je $\overline{S}$ multiplikativan sistem. Osim toga je

$\overline{S}\cap\alpha=\left(\bigcup_{i\in I} S_i\right)\cap\alpha=\bigcup_{i\in I}(S_i\cap\alpha)=\varnothing$, pa $\overline{S}\in\Sigma$. Kako je Σ induktivno uređen skup on ima maksimalni element. Označimo ga sa S.

Pokažimo sada da je $A\setminus S$ ideal prstena A. Neka $a,b\in A\setminus S$. To znači da $a,b\notin S$, a S je maksimalan multiplikativan sistem koji se ne presjeca sa α pa postoje $s,t\in S$ i $m,n\in N$ takvi da $a^m s, b^n t\in\alpha$ (jer bi u suprotnom, a i b pripadali nekom mulltiplikativnom sistemu koji se ne presjeca sa α, što je u suprotnosti sa našom pretpostavkom da je S maksimalan multiplikativan sistem sa ovom osobinom). Sada $(a-b)^{m+n} st\in\alpha$, pa $a-b\in A\setminus S$. Neka je $x\in A$ proizvoljno. Tada $(ax^n)s\in\alpha$, pa $xa\in A\setminus S$. Ovim smo pokazali da je $A\setminus S$ ideal. Pokažimo da je to i prost ideal. Neka je $ab\in A\setminus S$. Ako $a,b\notin A\setminus S$ onda $a,b\in S$, a kako je S multiplikativan sistem, to znači da i $ab\in S$, pa $ab\notin A\setminus S$ što je nemoguće. Dakle, $A\setminus S$ je prost ideal, a očigledno je da je to minimalan prost ideal prstena A u kome je sadržan ideal α.

Obrnuto, ako je $A \setminus S$ minimalan prost ideal prstena A u kome je sadržan ideal α, onda je , očigledno, S maksimalan multiplikativan sistem koji se ne presjeca sa α.

9. Za multiplikativni sistem S kaže se da je saturiran, ako $xy \in S \Rightarrow x \in S \wedge y \in S$. Dokazati:

a) S je saturirano ako i samo ako je $A \setminus S$ unija prostih ideala.

b) Za svaki multiplikativni sistem S postoji jedinstveni minimalni saturirani sistem $\overline{S}$ koji sadrži S ($\overline{S}$ se zove saturacija sistema S).

c) Saturacija $\overline{S}$ sistema S je komplement u A unije prostih ideala koji se ne presjecaju sa S;

d) Odrediti $\overline{S}$, ako je $S = 1 + \alpha$, gdje je α ideal prstena A.

Rješenje:

a) Neka je $A \setminus S$ unija prostih ideala. Neka je $xy \in S$ i neka npr. $x \notin S$. Tada $x \in A \setminus S$ pa postoji prosti ideal α prstena A takav da $x \in \alpha$ pa i $xy \in \alpha$ tj. $xy \in A \setminus S$, što je u kontradikciji sa pretpostavkom da $x \in A \setminus S$. Dakle i x i y su iz skupa S. Obrnuto, neka je S saturiran multiplikativan sistem . Za $x \in A \setminus S$ vrijedi da je $(x) \cap S \neq \varnothing$, pa prema prethodnom zadatku postoji prosti ideal γ prstena A takav da je $(x) \subseteq \gamma \subseteq A \setminus S$. Znači $A \setminus S$ je unija prostih ideala prstena A.

b) Neka je S multiplikativan sistem. $S \subseteq A$, a A je saturiran multiplikativan sistem. Presjek svih saturiranih multiplikativnih sistema koji sadrže sistem S je najmanji saturiran multiplikativni sistem koji sadrži sistem S.

c) Prema a) sistem $\overline{S}$ je komplement unije prostih ideala od kojih se ni jedan ne presjeca sa S. Komplement unije svih prostih ideala koji se ne presjecaju sa S je saturiran multiplikativan sistem (opet prema a)) koji sadrži S, a sadržan je u $\overline{S}$, pa je i jednak $\overline{S}$.

d) Neka je $S = 1 + \alpha$, gdje je α ideal prstena A. Neka je β ideal prstena A koji ima neprazan presjek sa S tj. neka postoji $c \in \beta \cap (1 + \alpha)$ i $c \neq 0$. Kako $c \in \beta$ i $c \in 1 + \alpha$ to postoji $a \in \alpha$ takvo da je $c = 1 + a$. Sada je $1 = -a + c$ što znači da je ideal β komaksimalan idealu α. Dakle, ideal koji se presjeca sa $1 + \alpha$ je komaksimalan idealu α, pa je $\overline{S}$, u ovom slučaju, komplement unije svih prostih ideala prstena A koj nisu komaksimalni sa α.

10. Neka za multiplikativne sisteme S i T prstena A vrijedi $S \subseteq T$. Neka je $f : A_S \to A_T$ homomorfizam koji $a/s \in A_S$ prevodi u $a/s \in A_T$. Dokazati da su slijedeće tvrdnje ekvivalentne:

a) f je bijektivno;

b) Za svako $t \in T$ element $t/1 \in A_S$ je invertibilan;

c) Za svako $t \in T$ postoji $x \in A$ za koje je $tx \in S$;

d) T je sadržano u saturaciji $\overline{S}$ sistema S;

e) Svaki prosti ideal koji se presjeca sa T presjeca se i sa S.

Rješenje:

$a) \Rightarrow b)$

Pretpostavimo da je $f : A_S \to A_T$ bijektivno i neka je $t \in T$ proizvoljno. $\frac{t}{1} \in A_T$ je invertibilno pa, kako je f bijektivno preslikavanje i $f^{-1}\left(\frac{t}{1}\right) = \frac{t}{1} \in A_S$ je takođe invertibilno.

$b) \Rightarrow c)$

Pretpostavimo da je $\frac{t}{1} \in A_S$ invertibilno za svako $t \in T$ i uzmimo $\frac{t}{1} \in A_S$ proizvoljno. Neka je $\frac{a}{s} \in A_S$ inverzni element elementa $\frac{t}{1}$, tj. neka je $\frac{t}{1} \cdot \frac{a}{s} = \frac{1}{1}$. Ovo znači da postoji $s' \in S$ takvo da je $(ta - s)s' = 0$, tj. $tas' = ss' \in S$. Ako stavimo da je $x = as'$ onda $x \in A$ i $tx \in S$ što je i trebalo pokazati.

$c) \Rightarrow d)$

Neka za svako $t \in T$ postoji $x \in A$ za koje je $tx \in S$ i neka je $\overline{S}$ saturacija sistema S. Ako je $t \in T$ proizvoljno tada je $tx \in S \subseteq \overline{S}$. Znači, $x \in \overline{S}$ i $t \in \overline{S}$ pa je $T \subseteq \overline{S}$.

$d) \Rightarrow e)$

Kako je $S \subseteq T \subseteq \overline{S}$, a $\overline{S}$ je unija svih prostih ideala koji se ne presjecaju sa S, pa pošto je $\overline{S}$ saturacija i od T, to se pomenuti ideali ne presjecaju ni sa T.

$e) \Rightarrow c)$

Pretpostavimo da postoji barem jedno $t \in T$ takvo da za svako $x \in A$ $tx \notin S$. Posmatrajmo ideal generisan sa t. $(t) \cap S = \varnothing$, pa postoji i prosti ideal γ takav da je $(t) \subseteq \gamma$ i $\gamma \cap S = \varnothing$, što je nemoguće jer svaki prosti ideal koji se presjeca sa T presjeca se i sa S.

$c) \Rightarrow a)$

Pokažimo da je f bijektivno. Neka je $\frac{a}{t} \in A_T$ proizvoljno. Prema c) postoji $x \in A$ takvo da je $tx \in S$. Tada je i $\frac{a}{t} = \frac{ax}{tx} \in A_s$, pa je f sirjektivno. Neka je $f\left(\frac{a}{s}\right) = 0$ (u A_T). To znači da postoji $t \in T$ za koje je $at = 0$, pa je i $atx = 0$ za svako $x \in A$, pa postoji i $s \in S$ za koje je $as = 0$, što znači da je $\frac{a}{s} = 0$ (u A_S).

11. Skup S_0 svih regularnih elemenata prstena A je saturiran multiplikativni sistem. Zato je skup $D = A \setminus S_0$ djelitelja nule unija prostih ideala koji se ne presjecaju sa S_0. Dokazati da je svaki minimalni prosti ideal γ prstena A sadržan u D.

Rješenje:

Neka je γ prost ideal prstena A. Označimo sa R_0 multiplikativni podsistem sistema S_0 generisan elementima iz $A \setminus \gamma$. $R_0 \cap (0) = \varnothing$, a osim toga je $A \setminus \gamma \subseteq R_0$. Ako je γ minimalan prost ideal onda je $A \setminus \gamma$ maksimalan multiplikativni sistem koji se ne presjeca sa (0), pa je $S_0 \subseteq A \setminus \gamma$, tj. $\gamma \subseteq A \setminus S_0 = D$.

12. Neka je S_0 skup svih regularnih elemenata prstena A. Dokazati:

a) S_0 je najširi multiplikativni sistem S prstena A za koji je preslikavanje $A \to A_S$ injektivno;

b) Svaki element u A_{S_0} je jedinica ili djelitelj nule;

c) Svaki prsten A u kome je svaki element djelitelj nule ili jedinica podudara se sa svojim prstenom razlomaka, tj. preslikavanje $A \to A_S$ je izomorfizam.

Rješenje:

a) Neka je S multiplikativni sistem prstena A za koji je preslikavanje $f : A \to A_S$ injektivno, $s \in S$ proizvoljno i $a \in A$ takvo da je $as = 0$. Ovo zapravo, znači da je $\frac{a}{1} = 0$ (u A_S), a zbog injektivnosti preslikavanja f je $a = 0$. Dakle, s je regularan element prstena A pa je $s \in S_0$.

b) Neka je $\frac{a}{s} \in A_{S_0}$ proizvoljno. Tada $a \in S_0$ ili postoji $b \in A$, $b \neq 0$ i takvo da je $ab = 0$.,

Ako $a \in S_0$ onda je $\frac{a}{s}$ jedinica prstena A_{S_0}, a u suprotnom je $\frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} = 0$, gdje je $t \in T$, što znači da je $\frac{a}{s}$ djelitelj nule u A_{S_0}.

c) Prema a) je preslikavanje $f : A \to A_{S_0}$ injektivno, pa je dovoljno pokazati da je f sirjektivno. Neka je $\frac{a}{s} \in A_{S_0}$ proizvoljno. $s \in S_0$, a kako je svaki element prstena A jedinica ili djelitelj nule to postoji $\overline{s} \in S_0$ takvo da je $s\overline{s} = 1$. Sada je $\frac{a}{s} = \frac{a\overline{s}}{s\overline{s}} = \frac{a\overline{s}}{1}$, što znači da je $f\left(a\overline{s}\right) = \frac{a}{s}$. Dakle, preslikavanje $f : A \to A_{S_0}$ je izomorfizam.

13. Neka je A oblast cijelih, M A-modul. Element $x \in M$ zove se torzioni element ako je $Ann(x) \neq 0$. Torzioni elementi A-modula M čine podmodul A-modula M , koli se označava sa $T\left(M\right)$ i zove torzioni podmodul A-modula M . Ako je $T\left(M\right) = 0$, tada se kaže da je M modul bez torzije. Dokazati:

a) A-modul $M / T\left(M\right)$ je modul bez torzije;

b) Ako je $f : M \to N$ A-homomorfizam, tada je $f\left(T\left(M\right)\right) \subseteq T\left(N\right)$;

c) Ako je $0 \to M' \to M \to M''$ egzaktan niz A-modula, tada je i niz $0 \to T\left(M'\right) \to T\left(M\right) \to T\left(M''\right)$ egzaktan.

Rješenje:

a) Neka je $x \in T\left(M / T\left(M\right)\right)$ tj, neka je $Ann\left(x\right) \neq 0$. Ovo znači da postoji $b \in A$, $b \neq 0$ i takvo da je $bx = 0$. $x = m + T\left(M\right)$, gdje $m \in M$. Iz $bx = 0$ slijedi da je $bm \in T\left(M\right)$, pa postoji $a \in A$, $a \neq 0$ takvo da je $a\left(bm\right) = \left(ab\right)m = 0$. Kako je $a \neq 0$, $b \neq 0$ i A oblast cijelih to je i $ab \neq 0$, a $m \in T\left(M\right)$. Dakle, $x = m + T\left(M\right) = 0 + T\left(M\right)$, tj. $T\left(M / T\left(M\right)\right) = 0$.

b) Neka je $f: M \to N$ A-homomorfizam i $y \in f(T(M))$. Neka je $x \in T(M)$ takvo da je $f(x) = y$. Kako $x \in T(M)$, to postoji $a \in A$, $a \neq 0$ takvo da je $ax = 0$. Tada je i $f(ax) = af(x) = ay = 0$, tj. $Ann(y) \neq 0$, što znači da je $y \in T(N)$. Dakle $f(T(M)) \subseteq T(N)$.

c) Prema b) preslikavanja $f: M' \to M$ i $g: M \to M''$ induciraju preslikavanja $\overline{f}: T(M') \to T(M)$ i $\overline{g}: T(M) \to T(M'')$, redom. Pokažimo da je $\overline{f}$ injektivno preslikavanje. Niz $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ je egzaktan što znači da je preslikavanje f injektivno, pa iz $\overline{f}(x) = f(x) = 0$ slijedi da je injektivno i $\overline{f}$. Pokažimo sada da je $Ker(\overline{g}) = \mathrm{Im}(\overline{f})$. Neka je $x \in Ker(\overline{g})$. Odatle slijedi da je $x \in T(M)$ i $x \in Ker(g) = \mathrm{Im}(f)$ tj. $x \in \mathrm{Im}(\overline{f})$. Na sličan način bi zaključili da je i $\mathrm{Im}(\overline{f}) \subseteq Ker(\overline{g})$. Dakle, $\mathrm{Im}(\overline{f}) = Ker(\overline{g})$, a niz $0 \to T(M') \xrightarrow{\overline{f}} T(M) \xrightarrow{\overline{g}} T(M'')$ je egzaktan.

14. Neka je A oblast cijelih, a M A-modul. Dokazati da za svaki multiplikativni sistem $S\,(0 \notin S)$ oblasti A vrijedi $T(S^{-1}M) = S^{-1}(TM)$. Na osnovu toga dokazati ekvivalentnost slijedećih tvrdnji:

a) M je modul bez torzije;
b) M_γ je modul bez torzije za svaki prosti ideal γ oblasti A;
c) M_m je modul bez torzije za svaki maksimalni ideal m oblasti A.

Rješenje:

Neka je $x \in T(S^{-1}M)$, tj, neka je $Ann(x) \neq 0$. Ovo znači da postoji $b \in A$, $b \neq 0$ i takvo da je $bx = 0$. Kako $x \in S^{-1}M$, x je oblika $\frac{m}{s}$ pri čemu $m \in M$ i $s \in S$. Iz $b \cdot \frac{m}{s} = \frac{bm}{s} = 0$ slijedi da postoji $\overline{s} \in S$ takvo da je $bm\overline{s} = 0$. $b\overline{s} \in A$ i $b\overline{s} \neq 0$, pa $m \in T(M)$ što znači da je $\frac{m}{s} \in S^{-1}(T(M))$. Dakle, $T(S^{-1}M) \subseteq S^{-1}(T(M))$. Dokažimo da važi i obrnuta implikacija. Neka je $x \in S^{-1}(T(M))$. $x = \frac{m}{s}$ gdje je $m \in T(M)$ i $s \in S$. Ovo znači da postoji $a \in A$, $a \neq 0$ i takvo da je $am = 0$. Sada je i $a\frac{m}{s} = \frac{am}{s} = 0$, pa $x = \frac{m}{s} \in T(S^{-1}M)$. Dakle, zaista je $T(S^{-1}M) = S^{-1}(T(M))$.

Dokažimo sada ekvivalentnost tvrdnji a) , b) i c):

$a) \Rightarrow b)$

Neka je M modul bez torzije i γ prost ideal prstena A. Tada iz $T(M) = 0$ slijedi $T(M_\gamma) = (T(M))_\gamma = 0$. Dakle, M_γ je modul bez torzije za svaki prosti ideal prstena A.

$b) \Rightarrow c)$

Svaki maksimalan ideal je prost , pa je implikacija očigledna.

$c) \Rightarrow a)$

Ako je $T(M_m)=(T(M))_m=0$ za svaki maksimalan ideal prstena A, onda je na osnovu propozicije 3.8. i $T(M)=0$.

15. Neka je M A-modul, a α ideal prstena A. Ako je $M_m=0$ za svaki maksimalni ideal $m\supseteq\alpha$, dokazati da je $M=\alpha M$.

Rješenje:
Neka je $M/\alpha M$ A/α modul. Za svaki maksimalan ideal m/α prstena A/α je $(M/\alpha M)_m=0$, pa je prema propoziciji 3.8. i $M/\alpha M=0$, tj. $M=\alpha M$.