Suma i presjek podprostora. Direktna suma. Komplement

Definicija: *Neka je* $\left(S_i\right)_{i\in I}$ *familija podmodula* $R-$*modula* V. *Presjek* $S=\bigcap_{i\in I} S_i$ *te familije podmodula je opet podmodul* $R-$*modula* V. *To je najveći podmodul sadržan u svakom od podmodula* $S_i\ \left(i\in I\right)$, *a zove se presjek modula* $S_i\ \left(i\in I\right)$.
Skup $T=\sum_{i\in I} S_i$ *svih elemenata* $x\in V$ *koji se mogu napisati u obliku sume bar jedne familije* $\left(x_i\right)_{i\in I}$ *za koju je* $x_i\in S_i\ \left(i\in I\right)$ *predstavlja podmodul* $R-$*modula* V. *To je najmanji podmodul modula* V *koji sadrži sve podmodule* $S_i\ \left(i\in I\right)$ *i zove se suma podmodula* $S_i\ \left(i\in I\right)$.

Definicija: *Za sumu* $\sum_{i\in I} S_i$ *podmodula* $S_i\ \left(i\in I\right)$ $R-$*modula* V *kaže se da je direktna ako je svako* x *iz te sume jednako sumi tačno jedne familije* $\left(x_i\right)_{i\in I}$ $x_i\in S_i\ \left(i\in I\right)$.

Definicija: *Neka je* S *podmodul modula* V. *Za podmodul* T *modula* V *reći ćemo da je komplement podmodula* S *ako je suma* $S+T$ *direktna i daje čitav modul* V, *tj. ako vrijedi* $S\oplus T=V$.

1. Neka su U i V podprostori prostora $\mathbb{R}^4$ generisani skupovima vektora $\left\{(1,1,0,-1),(1,2,3,0),(2,3,3,-1)\right\}$ i $\left\{(1,2,2,-2),(2,3,2,-3),(1,3,4,-3)\right\}$ redom. Odrediti baze podprostora $U+V$ i $U\cap V$.

2. Neka je U podprostor prostora $\mathbb{R}^5$ generisan vektorima $\left\{(1,3,-2,2,3),(1,4,-3,4,2),(2,3,-1,-2,9)\right\}$, a V podprostor generisan sa $\left\{(1,3,0,2,1),(1,5,-6,6,3),(2,5,3,2,1)\right\}$. Odrediti baze podprostora $U+V$ i $U\cap V$.

3. Dokazati da polinomi $(1-x)^3,(1-x)^2,(1-x)$ i 1 generišu prostor polinoma stepena manjeg ili jednakog 3 u jednoj promjenjivoj sa koeficijentima iz polja realnih brojeva.

4. Napisati $u=3x^2+8x-5$ kao linearnu kombinaciju polinoma $p=2x^2+3x-4$ i $q=x^2-2x-3$.

5. Neka su U i V podprostori vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$ definisani sa $U=\left[(a,b,c):a=b=c\right]$ i $V=\left[(0,b,c)\right]$. Pokazati da je $U\oplus V=\mathbb{R}^3$.

6. Dokazati da su u vektorskom prostoru funkcija jedne realne promjenjive vektori $f_1, f_2, ..., f_n$ linearno nezavisni ako i samo ako postoje brojevi $a_1, a_2, ..., a_n$ takvi da je determinanta matrice $\left[f_i \left(a_i \right) \right]$ $\left(1 \le i, j \le n \right)$ različita od nule.

7. Neka su prostoru $\mathbb{R}^4$ dati podprostori $U = \left[(1,1,1,1), (-1,-2,0,1), (1,0,2,3) \right]$ i $V = \left[(-1,-1,1,-1), (2,2,0,1) \right]$. Dokazati da je $\mathbb{R}^4 = U \oplus V$ i odrediti projekciju vektora $a = (4,2,4,4)$ na podprostor U paralelno sa V.

8. Dokazati da je vektorski prostor $\mathbb{R}^{n \times n}$ kvadratnih matrica reda n nad poljem realnih brojeva direktna suma prostora simetričnih i kososimetričnih matrica. Naći projekciju matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 1 \end{bmatrix}$ na svaki od navedenih prostora paralelno onom drugom.

9. Neka je $I = \{1, 2, ..., n\}$. Dokazati da je suma $\sum_{i \in I} S_i$ direktna ako i samo ako vrijedi $S_j \cap \left(S_1 + S_2 + ... + S_{j-1} \right) = \{0_v\}$ $(j = 1, ..., n)$.

10. Neka su U, V i W vektorski podprostori vektorskog prostora X. Da li je $U \cap (V + W) = (U \cap V) + (U \cap W)$?

11. Proširimo definiciju sume na proizvoljne neprazne skupove (ne nužno prostore) S i T vektorskog prostora V, stavljajući da je $S + T = \{ s + t : s \in S, t \in T \}$. Pokazati da ova operacija ima slijedeće osobine:
   a) $S + T = T + S$;
   b) $S_1 + (S_2 + S_3) = (S_1 + S_2) + S_3$;
   c) $S + \{0\} = \{0\} + S$;
   d) $S + V = V + S = V$.