USLOVI LANACA. NOETHERINI PRSTENI

1. Neka je $f : M \to M$ homomorfizam A-modula M. Dokazati:

a) Ako je M Noetherin A-modul, a f sirjektivno, tada je f injektivno preslikavanje;

b) Ako je M Artinov A-modul, a f injektivno, tada je f sirjektivno preslikavanje.

Rješenje:

a) Posmatrajmo niz podmodula $Ker\left(f^i\right)$ $\left(i=1,2,...\right)$. M je Noethrin A-modul, a za podmodule $Ker\left(f^i\right)$ vrijedi, $Ker\left(f\right) \subseteq Ker\left(f^2\right) \subseteq ...$, pa postoji prirodan broj n za koji je $Ker\left(f^n\right) = Ker\left(f^{n+1}\right) = ...$ Neka je $x \in Ker\left(f^n\right)$ proizvoljno. To znači da je $f^n\left(x\right) = 0$. Zbog sirjektivnosti preslikavanja f^n postoji $y \in M$ takvo da je $f^n\left(y\right) = x$. Sada je $f^{2n}\left(y\right) = f^n\left(f^n\left(y\right)\right) = f^n\left(x\right) = 0$, pa $y \in Ker\left(f^{2n}\right) = Ker\left(f^n\right)$, a ovo znači da je $x = 0$. Dakle, $Ker\left(f^n\right) = \left\{0\right\}$, pa kako je $Ker\left(f\right) \subseteq Ker\left(f^n\right)$, vrijedi i $Ker\left(f\right) = \left\{0\right\}$, što znači da je f injektivno preslikavanje.

b) Posmatrajno niz podmodula $\mathrm{Im}\left(f^i\right)$ $\left(i=1,2,...\right)$. Jasno je da vrijedi $\mathrm{Im}\left(f\right) \supseteq \mathrm{Im} \supseteq \left(f^2\right) \supseteq ...$, pa kako je M Artinov modul, za neki prirodan broj n vrijedi $\mathrm{Im}\left(f^n\right) = \mathrm{Im}\left(f^{n+1}\right) = ...$. Uzmimo proizvoljno $x \in M$ $\quad f^n\left(x\right) \in \mathrm{Im}\left(f^n\right) = \mathrm{Im}\left(f^{n+1}\right)$, pa postoji $y \in M$ za koje je $f^{n+1}\left(y\right) = f^n\left(x\right)$, a kako je po pretpostavci f injektivno preslikavanje, odavde dobijamo da vrijedi $f\left(y\right) = x$. $x \in M$ je bilo proizvoljno, pa na osnovu rečenog zaključujemo da je f sirjektivno preslikavanje.

2. Ako svaki neprazan podskup skupa konačno generisanih podmodula A-modula M ima maksimalan element, dokazati da je M Noetherin A-modul.

Rješenje: Dovoljno je da pokažemo da svaki podmodul A-modula M konačno generisan. Skup konačno generisanih podmodula modula M je neprazan skup, pa po pretpostavci ima maksimalni element. Označimo ga sa N_0. Pretpostavimo da je $N_0 \neq M$. Tada postoji $x \in M \setminus N_0$. Modul $N_0 + Ax$ je konačno generisan, a strogo sadrži modul N_0. Međutim, ovo je u kontradikciji sa pretpostavkom da je N_0 maksimalan konačno generisan podmodul modula M. Znači $M = N_0$, pa je M Noetherin A-modul.

3. Neka su N_1 i N_2 podmoduli A-modula M. Dokazati: Ako su M/N_1 i M/N_2 Noetherini (Artinovi) A-moduli onda je to i A-modul $M/N_1 \cap N_2$.

Rješenje: Direktna suma Noetherinih (Artnovih) modula je opet Noetherin (Artinov) modul, pa je i modul $M/N_1 \oplus M/N_2 = M'$ Noetherin (Artinov). Neka je $f: M/N_1 \cap N_2 \to M'$ definisano sa $f(x + N_1 \cap N_2) = (x + N_1, x + N_2)$, a $g: M' \to M'/\operatorname{Im}(f)$ prirodni epimorfizam. Preslikavanje f je injektivno, a g sirjektivno, pa je niz $0 \to M/N_1 \cap N_2 \to M' \to M'/\operatorname{Im}(f) \to 0$ egzaktan. Na osnovu propozicije 6.3. zaključujemo da je i A-modul $M/N_1 \cap N_2 = M'$ Noetherin (Artinov).

4. Neka je M Noetherin A-modul, a $\alpha = Ann(M)$. Dokazati da je prsten A/α Noetherin.

Rješenje: M je Noethrin A-modul, pa je konačno generisan. Neka je $\{x_1, ..., x_n\}$ generator modula M. Označimo sa M' direktnu sumu modula Ax_i $(i = 1, 2, ..., n)$. Modul M' je konačno generisan, pa je i on Noetherin modul. Definišimo preslikavanje $f: A/\alpha \to M'$ sa $f(a + \alpha) = (ax_1, ax_2, ..., ax_n)$, $a \in A$ i pokažimo da je f injektivno. Neka je $f(a + \alpha) = f(b + \alpha)$. To znači da je $ax_i = bx_i$ $(i = 1, 2, ..., n)$, tj. $(a - b)x_i = 0$ $(i = 1, 2, ..., n)$. Elementi x_i generišu modul M pa za svako $x \in M$ vrijedi $(a - b)x = 0$, što znači da je $a - b \in \{c \in A : cM = 0\} = Ann(M) = \alpha$. Dakle, $a + \alpha = b + \alpha$.
Neka je $g: M' \to M'/\operatorname{Im}(f)$ prirodni epimorfizam. Jasno, g je sirjektivno, a osim toga vrijedi i $Ker(g) = \{x \in M' : g(x) = 0 + \operatorname{Im}(f)\} = \{x \in M' : x \in \operatorname{Im}(f)\} = \operatorname{Im}(f)$. Ovo znači da je niz $0 \to A/\alpha \to M' \to M'/\operatorname{Im}(f) \to 0$ egzaktan, pa na osnovu propozicije 6.3. zaključujemo da je A/α Noetherin A/α-modul, tj, da je A/α Notherin prsten.

5. Neka prsten A nije Noetherin, a Σ neka je skup svih ideala prstena A koji nisu konačno generisani. Dokazati da skup Σ sadrži maksimalne elemente i da su oni prosti ideali prstena A.

Rješenje: Jednostavno se pokazuje da je skup Σ induktivno uređen relacijom inkluzije, pa po Zornovoj lemi zaključujemo da ima maksimalne elemente. Neka je α maksimalni element u skupu Σ. Pretpostavimo da α nije prost ideal prstena A. To znači da postoje bar dva elementa x i y prstena A za koje vrijedi $xy \in \alpha$, ali ni x ni y nisu u α. Posmatrajmo ideal $(x) + \alpha$. Očigledno je $\alpha \subsetneq \alpha + (x)$, pa kako je α maksimalan element u Σ, $(x) + \alpha$ siguno ne pripada skupu Σ, pa je to konačno generisan ideal. Neka elementi $b_i = a_i x + a_i'$ $(i = 1, 2, ..., n)$, gdje $a_i' \in \alpha$, $a_i \in A$ generišu ideal α. Označimo sa α_0 ideal generisan elementima

a_i' $(i=1,2,...,n)$. Vrijedi $\alpha+(x)=\alpha_0+(x)$. Neka su sada $z\in\alpha$ i $bx\in(x)$ proizvoljni. To znači da postoje $z_0\in\alpha_0$ i $cx\in(x)$ za koje je $z+bx=z_0+cx$. Dakle, $z=z_0+(a-b)x=z_0+kx$, gdje smo stavili da je $k=a-b$. Kako $z_0\in\alpha$, a $x\notin\alpha$ mora biti $kx\in\alpha$, što znači da $k\in(\alpha:x)$. Dakle, $\alpha\subseteq\alpha_0+(\alpha:x)x$, a kako je obrnuta inkluzija jasna, imamo da $\alpha=\alpha_0+(\alpha:x)x$. Za element y vrijedi $xy\in\alpha$, pa $y\in(\alpha:x)$. Odavde slijedi da je $\alpha\subsetneqq(\alpha:x)$, pa je ideal $(\alpha:x)$ konačno generisan. To dalje znači da je i $\alpha=\alpha_0+(\alpha:x)x$, kao suma dva konačno generisana ideala i sam konačno generisan što nije tačno. Do ove kontradikcije nas je dovela pretpostavka da α nije prost ideal, pa je treba odbaciti.

6. Neka je A Noetherin prsten, a $f=\sum_{i=0}^{\infty}a_ix^i\in A[[x]]$. Dokazati da je f nilpotentno ako i samo ako je svako a_i nilpotentno.

Rješenje: Pretpostavimo da su svi a_i nilpotentni. Ideal α generisan ovim elementima je konačno generisan, jer je ideal Noetherinog prstena A. Generatorni elementi tog ideala su, naravno nilpotentni, pa je i sam ideal α nilpotentan . To znači da postoji prirodan broj n za koji je $\alpha^n=0$, pa je i $a_i^n=0$ $(i=1,2,...)$. Odavde slijedi da je i $f^n=0$, tj. f je nilpotentan element prstena $A[[x]]$. Obratna tvrdnja slijedi iz zadatka 4. glave 1.

7. Neka je α ireducibilan ideal prstena A. Dokazati da su slijedeći uslovi ekvivalentni:
(i) α je primaran ideal;
(ii) Za svaki multiplikativni sistem S prstena A je $(S^{-1}\alpha)^c=(\alpha:s)$ (za neko $s\in S$)
(iii) Niz $(\alpha:x^i)$ $(i=1,2,...)$ je stacioniran za svako $x\in A$.

Rješenje:
$(i)\Rightarrow(ii)$ Neka je α γ-primaran ideal,a S multiplikativni sistem prstena A. Ako je $S\cap\gamma\neq\varnothing$, onda je na osnovu propozicije 4.8. $(S^{-1}\alpha)^c=A\cap\alpha=\alpha$. Osim toga je $\alpha=(S^{-1}\alpha)^c=\bigcup_{s\in S}(\alpha:s)$, pa kako je $\alpha\subseteq(\alpha:s)$ to je $(\alpha:s)=(S^{-1}\alpha)^c$ za neko $s\in S$.

Pretpostavimo sada da je $S\cap\gamma=\varnothing$. Na osnovu propozicije 4.8. je $(S^{-1}\alpha)^c=A$. Odavde i iz $(S^{-1}\alpha)^c=\bigcup_{s\in S}(\alpha:s)$ slijedi da je $(\alpha:s)=(S^{-1}\alpha)^c$ za neko $s\in S$.

$(ii)\Rightarrow(iii)$ Ako je x nilpotentan element prstena A onda postoji $n\in N$ za koje je $x^n=0$ pa je $(\alpha:x^i)=A$ $(\forall i\geq n)$, što znači da je niz $(\alpha:x)\subseteq(\alpha:x^2)\subseteq...$ stacioniran.

Ako x nije nilpotentan, onda je $S=\{x^i : i\in N\}$ multiplikativan sistem prstena A, pa je prema (ii) za neko $n\in N$ $\left(S^{-1}\alpha\right)^c=\left(\alpha:x^n\right)$. To znači da je $\left(S^{-1}\alpha\right)^c\supseteq\left(\alpha:x^{n+1}\right)\supseteq\left(\alpha:x^n\right)=\left(S^{-1}\alpha\right)^c$, pa je $\left(\alpha:x^{n+1}\right)=\left(\alpha:x^n\right)$, što znači da je niz $(\alpha:x)\subseteq\left(\alpha:x^2\right)\subseteq\ldots$ stacioniran.

$(iii)\Rightarrow(i)$ Neka je α ireducibilan ideal prstena A i neka je $xy\in\alpha$ i $y\notin\alpha$. Posmatrajmo niz $(\alpha:x)\subseteq\left(\alpha:x^2\right)\subseteq\ldots$. Prema (iii) je ovaj niz stacioniran pa postoji $n\in N$ za koje je $\left(\alpha:x^n\right)=\left(\alpha:x^{n+1}\right)=\ldots$. Odredimo čemu je jednak presjek ideala $\left(x^n\right)$ i (y). Ako je $z\in\left(x^n\right)\cap(y)$ onda postoji $a\in A$ za koje je $z=ay$, pa je $zx=ayx\in\alpha$. Dalje, $z\in\left(x^n\right)$ pa je $z=bx^n$ za neko $b\in A$. Sada je $bx^nx\in\alpha$, pa je $b\in\left(\alpha:x^{n+1}\right)=\left(\alpha:x^n\right)$. Odavde zaključujemo da $z\in\alpha$. Znači $(y)\cap\left(x^n\right)\subseteq\alpha$, a kako je obrnuta inkluzija očigledna, to zaključujemo da je $(y)\cap\left(x^n\right)=\alpha$. α je ireducibilan ideal i $\alpha\neq(y)$, što onda znači da je $\alpha=\left(x^n\right)$. Dakle, $x^n\in\alpha$, pa je α i primaran ideal prstena A.

8. Neka je X afina algebarska mnogostrukost zadana familijom jednačina $f_\alpha\left(t_1,\ldots,t_n\right)=0$ $(\alpha\in I)$. Dokazati da postoji konačan podskup I_0 skupa I takav da je X zadano familijom jednačina $f_\alpha\left(t_1,\ldots,t_n\right)=0$ $\left(\alpha\in I_0\right)$.

Rješenje: Prsten polinoma $A=k\left[t_1,t_2,\ldots,t_n\right]$ je Noetherin prsten, pa je svaki njegov ideal konačno generisan. Neka je $\{g_1,\ldots,g_n\}$ konačan skup koji generiše ideal α generisan polinomima $f_\alpha\left(t_1,\ldots,t_n\right)$ $(\alpha\in I)$. Svako g_i $(i=1,2,\ldots,n)$ se može napisati kao konačna linearna kombinacija elemenata iz α. Označimo sa I_0 familiju svih polinoma f_α koji se pojavljuju u tim linearnim kombinacijama. Sada je jasno da je familija I_0 konačna, i da polinomi $f_\alpha\left(t_1,\ldots,t_n\right)=0$ $\left(\alpha\in I_0\right)$ generiši ideal α, pa je X zadano familijom jednačina $f_\alpha\left(t_1,\ldots,t_n\right)=0$ $\left(\alpha\in I_0\right)$.

9. Neka je k algebarski zatvoreno polje, $A=k\left[t_1,\ldots,t_n\right]$ prsten polinoma, a α ideal prstena A. Neka je X algebarska mnogostrukost u k^n definisana idealom α, tj. $X=\left\{x=\left(x_1,\ldots,x_n\right)\in k^n : f(x)=0,\forall f\in\alpha\right\}$.

Neka je $I(X)$ ideal mnogostrukosti X, tj. $I(X)=\left\{g\in A: g(x)=0,\forall x\in X\right\}$. Dokazati da je $I(X)=r(\alpha)$.

Rješenje: Neka je $f \in r(\alpha)$, tj. neka postoji $n \in N$ za koje je $f^n \in \alpha$. To znači da je $f^n(x) = 0 \ (\forall x \in X)$, pa je i $f(x) = 0 \ (\forall x \in X)$, tj. $f \in I(X)$. Dakle, $I(X) \supseteq r(\alpha)$. Pretpostavimo sada da $f \notin r(\alpha)$. Kako je $r(\alpha)$ presjek svih prostih ideala prstena A koji sadrže ideal α, zaključujemo da postoji prost ideal β, $\alpha \subseteq \beta$ i $f \notin \beta$. Neka je $h: A \to A/\beta$ prirodni epimorfizam i neka je $\overline{f}$ slika polinoma f pomoću preslikavanja h. Stavimo da je $C = A/\beta\left[1/\overline{f}\right]$ i sa m označimo maksimalan ideal prstena C. C/m je konačno generisana k -algebra, pa je na osnovu propozicije 7.9. C/m konačno proširenje polja k. k je algebarski zatvoreno polje pa je prema tome, $C/m \cong k$. Slike x_i elemenata t_i u odnosu na kompoziciju preslikavanja $h: A \to A/\beta$, $h': A/\beta \to C$ i $h'': C \to C/m$ određuju tačke $x = (x_1, ..., x_n) \in k$. Ako je $g \in \alpha$ onda je $g \in \beta$, pa je za svaku takvu tačku $g(x) = 0$. $\overline{f}$ je invertibilno u C, pa $\overline{f} \notin m$, što znači da je $f(x_1, ..., x_n) \neq 0$. Dakle, $f \notin I[x]$. Iz ovoga , konačno, zaključujemo da je $I(X) = r(\alpha)$.