# *LINEARNA ALGEBRA*

## Vektorski prostori i pdprostori

1. Dokazati da je komutativnost sabiranja u vektorskom prostoru posljedica ostalih aksioma vektorskog prostora.

2. Neka je $V$ vektorski prostor nad poljem $F$. Dokazati da za svako $a \in V$ važi:
   a) $0 \cdot a = 0$;
   b) $(-1) \cdot a = -a$.

3. Dokazati da za svaki prost broj $p$ i za svaki prirodan broj $n$ postoji bar jedan vektorski prostor koji ima $p^n$ elemenata.

4. Neka je $N$ podmodul modula $M$ nad prstenom $R$ i $a \in M$ proizvoljno. Stavimo da je $a + N = \{a + n : n \in N\}$. Dokazati da vrijedi:
   a) $a \in a + N$;
   b) $(\forall a, b \in M) \quad a + N = B + N \quad \Leftrightarrow \quad a - b \in N$;
   c) $(\forall a, b \in M)$ *ili je* $a + N = b + N$ *ili je* $a + N \cap b + N = \varnothing$.

***Definicija:*** *Izomorfizmom vektorskog prostora $V$ u vektorski prostor $W$ nad istim poljem skalara $F$ zovemo bijektivno preslikavanje $f : V \to W$ tako da $\forall x, y \in V \quad \alpha \in F$ vrijedi: $f(u+v) = f(u) + f(v)$ i $f(\alpha v) = \alpha f(v)$.*

5. Neka su $V = F^4$ i $W = F^{2\times 2}$ vektorski prostori nad poljem $F$. Dokazati da je preslikavanje $f((a_1, a_2, a_3, a_4)) = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$ izomorfizam vektorskih prostora $V$ i $W$ nad poljem $F$.

6. Neka je $F$ proizvoljno polje i $A$ skup. Označimo sa $F^A$ skup svih funkcija sa skupa $A$ u polje $F$. Ako u $F^A$ definišemo operacije sabiranja i množenja elementima iz $F$ sa $(f+g)(a) = f(a) + g(a)$ i $(\alpha f)(a) = \alpha f(a) \quad f, g \in F^A$ i $a, \alpha \in F$, onda $F^A$ postaje vektorski prostor nad poljem $F$. Dokazati! Ako je $\pi : A \to B$ bilo koja bijekcija skupa $A$ na skup $B$, dokazati da je sa $f \mapsto f \circ \pi$ definisan izomorfizam prostora $F^B$ na prostor $F^A$.

***Definicija:*** *Neka su $V_1, V_2, \ldots, V_n$ vektorski prostori nad istim poljem $F$. Skup $V$ svih $n-$troki $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$, $v_i \in V_i$, $i = 1, \ldots, n$ je takođe vektorski prostor nad poljem $F$ sa operacijama definisanim sa $(v_1, v_2, \ldots, v_n) + (u_1, u_2, \ldots, u_n) = (v_1 + u_1, v_2 + u_2, \ldots, v_n + u_n)$ i*

$\alpha(v_1, v_2, ..., v_n) = (\alpha v_1, \alpha v_2, ..., \alpha v_n)$. *Vektorski prostor* $V$ *zovemo Dekartov proizvod prostora* $V_1, V_2, ..., V_n$ *i označavamo sa* $V = V_1 \times V_2 \times ... \times V_n$.

7. Dokazati da je za proizvoljno polje $F$, $F^2 \times F^3 \cong F^5$.

8. Ako je $F$ proizvoljno polje , a $F[x]$ prsten polinoma u promjenjivoj $x$ sa koeficijentima iz polja $F$, pokazati da je $F[x]$ vektorski prostor nad poljem $F$ sa operacijama $+$ i $\cdot$ definisanim sa : $\sum_i a_i x^i + \sum_i b_i x^i = \sum_i (a_i + b_i) x^i$ i $\alpha \sum_i a_i x^i = \sum_i (\alpha a_i) x^i$. Da li je skup $U$ svih polinoma $p$ za koje je $p(1) = p(0)$ podprostor prostora $F[x]$? Isto pitanje i za skup $W$ svih polinoma $p$ za koje je $p(0) = 1$.

9. Obrazložiti da li je $\mathbb{R}^2$ podprostor prostora $\mathbb{R}^3$ nad poljem $\mathbb{R}$.

10. Ako unija $U \cup W$ dva podprostora istog vektorskog prostora $V$ sadrži neki podprostor $P$ od $V$, dokazati da je tada $P \subseteq U$ ili $P \subseteq W$. Primjerom pokazati da prethodno tvrđenje ne mora da važi i za uniju tri ili više podprostora.