III Vježbe: Vektorski prostor i modul

Definicija: *Neka je K dato polje i V neprazan skup sa unutrašnjom operacijom + tako da je $(V,+)$ Abelova grupa i spoljašnjom operacijom $\cdot$ za koju vrijedi:*

i) $k(v_1+v_2)=kv_1+kv_2 \quad \forall k\in K, \forall v_1,v_2\in V$;

ii) $(k_1+k_2)v=k_1v+k_2v \quad \forall k_1,k_2\in K, \forall v\in V$;

iii) $(k_1k_2)v=k_1(k_2v) \quad \forall k_1,k_2\in K, \forall v\in V$;

iv) $1\cdot v=v \quad \forall v\in V$.

Strukturu $(V,+,\cdot)$ zovemo vektorskim prostorom nad poljem K. Ako umjesto polja K uzmemo komutativan prsten sa jedinicom R dolazimo do pojma modula nad prstenom R .

Definicija: *Neka je V modul nad prstenom R, a S neprazan podskup skupa V . Reći ćemo da je skup S zatvoren ili stabilan u odnosu na operacije iz V ako su ispunjeni slijedeći uslovi:*

i) $x,y\in S \Rightarrow x+y\in S$;

ii) $r\in R, x\in S \Rightarrow rx\in S$.

Ukoliko je pri tome S modul nad R u odnosu na ove operacije, onda se kaže da je S podmodul modula V .

1. Dokazati da je skup svih n- torki sastavljenih od elemenata polja K, u kome je sabiranje i množenje elementom iz K definisano sa:
   $(a_1,a_2,...,a_n)+(b_1,b_2,...,b_n)=(a_1+b_1,a_2+b_2,...,a_n+b_n)$
   i $\lambda(a_1,a_2,...,a_n)=(\lambda a_1,\lambda a_2,...,\lambda a_n)$
   Vektorski prostor.

2. pokazati da je skup $\mathbb{Z}$ modul nad samim sobom u odnosu na uobičajene operacije sabiranja i množenja. Da li je skup $\mathbb{Z}$ vektorski prostor nad poljem realnih brojeva $\mathbb{R}$?

3. Pokazati da je skup $\mathbb{Z}_n$ modul nad prstenom cijelih brojeva $\mathbb{Z}$, u odnosu na uobičajenu operaciju sabiranja $\bmod(n)$ i množenja elementima iz $\mathbb{Z}$ definisanog sa $a[x]=[ax], \quad a\in\mathbb{Z}, [x]\in\mathbb{Z}_n$.

4. Objasniti koji od slijedećih skupova kvadartnih matrica reda n nad poljem realnih ili kompleksnih brojeva čini vektorski prostor u odnosu na operacije sabiranja matrica i množenja matrice elementom iz $\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$:
   a) Sve matrice;
   b) Simetrične matrice;
   c) Kososimetrične matrice;
   d) Singularne matrice;
   e) Regularne matrice;
   f) Matrice čiji je trag jednak nuli.

5. Provjeriti da li svaki od slijedećih skupova vektora obrazuje podprostor odgovarajućeg vektorskog prostora:
   a) Vektori u ravni sa početkom u tački O i krajem na jdnoj od pravih koje se sijeku u koordinatnom početku;
   b) Vektori u ravni sa centrom u koordinatnom početku i krajem na datoj pravoj;
   c) Vektori u ravni sa početkom u tački O i krajem koji nije na datoj pravoj;
   d) Vektori koordinatne ravni čiji krajevi pripadaju prvom kvadrantu;
   e) Vektori prostora $\mathbb{R}^n$ čije su koordinate cijeli brojevi;
   f) Vektori prostora $\mathbb{R}^n$ čije koordinate zadovoljavaju jednačinu $x_1 + x_2 + ... + x_n = 0$;
   g) Vektori prostora $\mathbb{R}^n$ koji su linearne kombinacije vektora $a_1, a_2, ..., a_n$;
   h) Konvergentni nizovi realnih brojeva;
   i) Nizovi realnih brojeva koji konvergiraju ka $a \in \mathbb{R}$;
   j) Polinomi parnog stepena sa koeficijentima iz $\mathbb{R}$;
   k) Polinomi koji ne sadrže parne stepene sa keficijentima iz $\mathbb{R}$.

6. Neka su U i W vektorski podprostori prostora V. Dokazati da je $U \cup W$ vektorski podprostor prostora V ako i samo ako je $U \subseteq W$ ili $W \subseteq U$.

7. Neka su $W_1, W_2, ...$ vektorski podprostori vektorskog prostora V za koje je $W_1 \subset W_2 \subset ...$. Dokazati da je $W = \bigcup_{i=1}^{\infty} W_i$ vektorski podprostor prostora V.

8. Dokazati da je skup W rješenja homogenog sistema linearnih jednačina
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n} = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{2n}x_2 + ... + a_{nn} = 0 \end{cases}$$
sa realnim koeficijentima , podprostor vektorskog prostora $\mathbb{R}^n$.

9. Neka je V modul nad prstenom R, a X neprazan podskup od V. Dokazati da skup X ima osobinu $(*)$ $\quad x, y, z \in X, \alpha, \beta, \gamma \in R, \quad \alpha + \beta + \gamma = 1 \Rightarrow \alpha x + \beta y + \gamma z \in X$, ako i samo ako postoji podmodul S modula V i $a \in V$ tako da je $X = a + S = \{a + s : s \in S\}$. U tom slučaju je podmodul S jednoznačno određen skupom X, a element a se može prizvoljno uzeti iz X.
   Ukoliko prsten R posjeduje element ρ za koji su ρ i $1 - \rho$ invertibilni, recimo, ako je R polje $\neq \{0,1\}$, tada je uslov $(*)$ ekvivalentan sa uslovom
   $(**)$ $\quad x, y \in X, \alpha \in R \Rightarrow \alpha x + (1 - \alpha) y \in X$.

10. Neka je V R-modul, S, T podmoduli modula V, a $X = a + S, \quad Y = b + T$. Dokazati da je $X \cap Y \neq \varnothing$ ili $X \cap Y = c + S \cap T$ i da drugi slučaj nastupa ako i samo ako $a - b \in S + T = \{s + t : s \in S, t \in T\}$.