ZADACI IZ ALGEBRE 1 - grupa 2

1. Pokazati da skup $\{1, 2, 3\}$ u odnosu na operaciju množenja $mod4$ nema, a da skup $\{1, 2, 3, 4\}$ u odnosu na operaciju množenja $mod5$ ima strukturu grupe, a zatim napisati Cayley-jevu te grupe.

2. Dokazati da je skup svih matrica formata 2×2 nad poljem realnih brojeva koje imaju determinantu jednaku 1 u odnosu na operaciju množenja matrica grupa.

3. Pokazati da je grupa G Abelova grupa ako i samo ako $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$ vrijedi za svaka dva elementa grupe G.

4. Dokazati da za svaka dva elementa a i b grupe G i za vaki cio broj n vrijedi $(a^{-1}ba)^n = a^{-1}b^n a$.

5. Pretpostavimo da je G grupa takva da za svaki izbor elemenata iz G iz $axb = cxd$ slijedi da je $ab = cd$. Dokazati da je G Abelova grupa.

6. Neka je $(G, *)$ grupa. Dokazati da je G komutativna grupa ako i samo ako za svaka dva elementa $a, b \in G$ vrijedi $(a * b)^2 = a^2 * b^2$.

7. Dokazati da je grupa G komutativna grupa ako i samo ako za sve $a, b \in G$ i svaka tri uzastopna cijela broja n vrijedi $(a * b)^n = a^n * b^n$.

8. Ako je $(G, *)$ grupa i $a_1, a_2, \ldots, a_n \in G$, dokazati da vrijedi $(a_1 * a_2 * \ldots * a_n)^{-1} = a_n^{-1} * \ldots * a_1^{-1}$.

9. Neka je $(S, *)$ konačna polugrupa. Pokazati da tada postoji $a \in S$ takvo da je $a^2 = a$.

10. Dokazati da je svaka konačna polugrupa u kojoj važi zakon kancelacije grupa.