ZADACI IZ ALGEBRE 1 - grupa 3

1. Neka je G grupa i neka su $a, b \in G$. Ako za elemente a i b važi $ab^3 = b^2a$ i $ba^3 = a^2b$ dokazati da je $a = b = e$.

2. Pokazati da u grupi G elementi:

   (a) a i a^{-1}

   (b) a i $b^{-1}ab$

   (c) ab i ba

   imaju isti red.

3. Neka je u grupi G element a ima red p, a element b ima red q. Ako elementi a i b međusobno komutiraju i ako su p i q uzajamno prosti brojevi dokazati da element ab ima red pq.

4. Neka su a i b elementi grupe G razliiti od neutralnog i neka za njih važe relacije $a^3 = b^4 = e$ i $ba = ab^3$. odrediti red elemenata ab i ba.

5. Ako grupa G sadrži tačno jdan element a reda 2, dokazati da za svako $x \in G$ važi $ax = xa$.

6. Neka je G konačna grupa reda n i k cio broj relativno prost sa n. Dokazati da je preslikavanje $f : G \to G$ definisano sa $f(x) = x^k$ permutacija skupa G.

7. Neka je G grupa. Dokazati da je H podgrupa grupe G ako i samo ako je

   (i) $H \subseteq G$, $H \neq \emptyset$

   (ii) $\forall x, y$ iz $x, y \in H \Longrightarrow xy^{-1} \in H$

8. Neka je H konačan neprazan podskup grupe G.Dokazati:

   (a) H je podgrupa grupe G ako i samo ako je $H \cdot H = H$

   (b) Ako je $(H, \cdot)$ grupoid onda je H podgrupa od G

9. Odrediti sve podgrupe grupe G ako je G

   (a) Klajnova četvorna grupa

   (b) Grupa permutacija skupa od tri elementa

   (c) Grupa cijelih brojeva $\mathbb{Z}$.