ZADACI IZ ALGEBRE 1- grupa 8

1. Neka je $G = \{\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{bmatrix} \; : \; a, b \in \mathbb{Z}_7 \; a \notin \{0, 3, 5, 6\}\}$

   a) Pokazati da je G grupa reda 21

   b) Neka je $N = \{\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \; : \; b \in \mathbb{Z}_7\}$. Dokazati da je N normalna podgrupa grupe G.

   c) Neka je $X = \{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \; : \; x, y \in \mathbb{Z}_7\}$. Dokazati da je $X \times X$ $G-$skup u odnosu na djelovanje definisano sa:

   $$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{bmatrix} * \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right) = \left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right)$$

   i odrediti orbitu elementa $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$.

2. Neka je G konačna grupa koja ima normalnu podgrupu N takvu da je $|N| = 3$ i $N \nsubseteq Z(G)$. Dokazati da G ima podgrupu K takvu da je $[G : K] = 2$.

3. Neka je G grupa koja sadrži element konačnog reda $n > 1$ i tačnno dvije klase konjugovanosti. Dokazati da je $|G| = 2$.

4. Pokazati da ne postoji grupa G takva da je $|G/Z(G)| = 37$.

5. Neka je $S \neq \emptyset$ podskup grupe G i neka je $C(S)$ centralizator skupa G definisan sa

   $$C(S) = \{x \in G \mid xs = sx \; \forall s \in S\}$$

   Pokazati da je $C(S)$ podgrupa grupe G.

6. Naći centralizator slijedećih podskupova od S_3:

   a) $B_1 = \{(1\,2\,3)\}$

   b) $B_2 = \{(1\,2)\}$

   c) $B_3 = \{(1\,2\,3)\,, (1\,2)\}$