ZADACI IZ ALGEBRE 1 - grupa 9

1. Neka su $G = G_1 \times G_2$ i $x_1 \in G_1$ i $x_2 \in G_2$. Ako su preslikavanja f_1, f_2, p_1 i p_2 definisana na slijedeći način:

$$f_1(x_1) = (x_1, e_1),\ f_2(x_2) = (e_1, x_2),\ p_1(x_1, x_2) = x_1,\ p_2(x_1, x_2) = x_2$$

Dokazati da vrijedi:

   (a) $f_i : G_i \to G_1 \times G_2$ je homomorfizam $i = 1, 2$
   (b) $p_i : G_1 \times G_2 \to G_i$ je homomorfizam $i = 1, 2$
   (c) $f_i(G_i)$ je normalna podgrupa od $G_1 \times G_2$, $i = 1, 2$
   (d) $G_1 \times G_2 = f_1(G_1)f_2(G_2)$
   (e) $f_1(G_1) \cap f_2(G_2) = E$, gdje je E jedinična grupa

2. Ako su A i B normalne podgrupe grupe G i $G = AB$ i $A \cap B = \{e\}$ dokazati da vrijedi:

   (a) $(\forall a \in A)$ i $(\forall b \in B\ ab = ba$
   (b) $G \cong A \times B$

3. Dokazati da je grupa G direktan proizvod svojih podgrupa $H_1, H_2, \ldots, H_n$ ako i samo ako je:

   (a) Ako je $i \neq j$ i $a_i \in H_i$, $B_j \in H_j$ onda je $ab = ba$
   (b) Svaki element $g \in G$ se jedinstveno predstavlja proizvodom $g = h_1 h_2 \ldots h_n$, pri čemu $h_i \in H_i\ \forall i$

4. Odrediti redove elemenata (a, b), (a^2, b), (a, b^2) u grupi $G = C_3 \times C_4$, gdje je $C_3 = \langle a \rangle$ i $C_4 = \langle b \rangle$. Koji od ovih elemenata generišu grupu G?

5. Ako je G unutrašnji direktni proizvod grupa A i B, onda je svaka normalna podgrupa N od A normalna i u G. Dokazati!

6. Neka je $G = A \times B$ i neka su π_1 i π_2 projekcije grupe G na podgrupe A i B redom. Ako je H podgrupa od G dokazati da je:

   (a) $A \cap H$ je normalna podgrupa od $\pi_1(H)$
   (b) $B \cap H$ je normalna podgrupa od $\pi_2(H)$
   (c) $\pi_1(H)/(A \cap H) \simeq \pi_2(H)/(B \cap H)$

7. Dokazati da je grupa $G = A \times B$ Abelova ako i samo ako su obe grupe A i B Abelove!